SEVEN
PUBLICAÇÕES ACADÊMICAS
2025

UMA INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ESPACIAL

Severino Horácio da Silva
Vandik Estevan Barbosa
Divanilda Maia Esteves
Michelli Barros

EDITORA CHEFE
Profº Me. Isabele de Souza Carvalho

EDITOR EXECUTIVO
Nathan Albano Valente

AUTORES DO LIVRO
Severino Horácio da Silva
Vandik Estevan Barbosa
Divanilda Maia Esteves
Michelli Barros

PRODUÇÃO EDITORIAL
Seven Publicações Ltda

EDIÇÃO DE ARTE
Evellyn Thais de Souza

EDIÇÃO DE TEXTO
Natan Bones Petitemberte

BIBLIOTECÁRIA
Bruna Heller

IMAGENS DE CAPA
Evellyn Thais de Souza

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

I61
Uma introdução à geometria espacial [recurso eletrônico] / Severino Horácio da Silva … [et al.]. – São José dos Pinhais, PR: Editora Seven, 2025.
Dados eletrônicos (1 PDF).

ISBN 978-65-6109-216-6

1. Matemática. 2. Geometria espacial. I. Silva, Severino Horácio da. II. Barbosa, Vandik Estevan. III. Esteves, Divanilda Maia. IV. Barros, Michelli. V. Título.

CDU 514

Bruna Heller - Bibliotecária - CRB10/2348

Índices para catálogo sistemático:
CDU: Geometria 514

DOI: 10.56238/livrosindi202542-001

Seven Publicações Ltda
CNPJ: 43.789.355/0001-14
editora@sevenevents.com.br
São José dos Pinhais/PR

Severino Horácio da Silva dedica este trabalho
a seus filhos Arthur e Luana.

Vandik Estevam Barbosa dedica este trabalho
à sua esposa Francisca e a seus filhos Vandikson, Francivandi e Vanessa.

Divanilda Maia Esteves dedica este trabalho
a seus pais, Alex (*in memorian*) e Gercina, ao seu esposo Gustavo e a seus filhos Pedro e Carol.

Michelli Barros dedica este trabalho
à sua mãe Maria das Dores Barros e a seus filhos Arthur e Luana.

AUTORES DO LIVRO

Severino Horácio da Silva

Licenciado e Bacharel em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB), Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade de São Paulo (USP). Atualmente é Professor Titular da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), lotado na Unidade Acadêmica de Matemática, no Centro de Ciências e Tecnologia da UFCG. Ao longo dos anos vem atuando tanto na Graduação quanto na Pós-Graduação. Sua área de pesquisa é a Matemática aplicada, com enfoque na Dinâmica assintótica de equações de evolução. Além disso, tem interesse constante no ensino de matemática e, em particular, no ensino de Geometria, já tendo ministrado várias turmas de Geometria Euclidiana Plana e Geometria Euclidiana Espacial para os cursos de graduação em Matemática do CCT/UFCG.

Vandik Estevan Barbosa

Bacharel e Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Atualmente é Professor Aposentado da Unidade Acadêmica de Matemática do CCT/UFCG. Em sua trajetória ministrou várias turmas de Fundamentos da Geometria Euclidiana para os cursos de Graduação do CCT/UFCG. Além disso, coordenou vários projetos relacionados ao ensino e a extensão. Em particular, destacamos a coordenação do Projeto Ensinando a Aprender e Aprendendo a Ensinar, o qual teve como alunos bolsistas Severino Horácio, Divanilda Maia e Michelli Barros.

Divanilda Maia Esteves

Licenciada e Bacharela em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB), Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e Doutora em Estatística pela Universidade de São Paulo (USP). Atualmente é Professora Doutora do Departamento de Estatística da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), atuando na Graduação e Pós-Graduação. Sua principal área de atuação é Probabilidade e Estatística, com ênfase em cadeias de alcance variável, cadeias de ordem infinita e estrutura regenerativa.

Michelli Barros

Licenciada em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB), Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e Doutora em Estatística pela Universidade de São Paulo (USP). Atualmente é Professora Titular da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), lotada na Unidade Acadêmica de Estatística, no Centro de Ciências e Tecnologia da UFCG. Sua principal linha de pesquisa é Análise de sobrevivência, onde atua tanto na Graduação quanto na Pós-Graduação. Foi bolsista de produtividade do CNPq de março de 2012 a fevereiro de 2021 e desde 2022 é pesquisadora bolsista da Petrobras.

APRESENTAÇÃO

Caro leitor,

É com muito prazer que apresentamos neste texto uma introdução à geometria espacial. Aqui, mergulharemos em um universo tridimensional repleto de conceitos e formas geométricas interessantes.

A geometria espacial é uma disciplina fascinante que explora as relações e características das figuras sólidas, como poliedros, prismas, pirâmides, troncos de pirâmides, cilindros, cones, troncos de cones e esferas. Cada um desses elementos possui beleza e peculiaridades únicas.

Ao longo das páginas, você será guiado pelas definições e propriedades fundamentais das formas geométricas espaciais, aprendendo como calcular suas áreas e volumes.

O trabalho aqui apresentado iniciou-se a partir de pesquisas bibliográficas para constituir as notas de aulas de um curso de geometria espacial do Projeto de Extensão "Ensinando a Aprender e Aprendendo a Ensinar", desenvolvido no então Departamento de Matemática e Estatística do Campus de Campina Grande da UFPB (atualmente UFCG). Ao longo dos anos essas notas vêm sendo aperfeiçoadas e servindo de suporte para a disciplina Fundamentos da Geometria Euclidiana Espacial, ofertada pela Unidade Acadêmica de Matemática para os cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da UFCG.

Cada capítulo foi estruturado cuidadosamente para garantir uma progressão lógica de ideias, facilitando a assimilação dos conceitos e o desenvolvimento do raciocínio espacial. Além disso, várias figuras (construídas com o *software* GeoGebra) foram inseridas para auxiliar no entendimento dos conceitos e diversos exercícios foram incluídos para consolidar o conhecimento e estimular o pensamento lógico dedutivo do aluno.

Com este livro, desejamos proporcionar ao leitor uma experiência enriquecedora que os inspire a explorar as maravilhas da geometria espacial e que você encontre nele um valioso recurso para expandir seus horizontes intelectuais.

Os autores gostariam de agradecer aos alunos das diversas turmas de Fundamentos da Geometria Euclidiana Plana e Espacial que estudaram com essas notas e participaram ativamente durante as aulas colaborando para a melhoria deste trabalho. Em particular, citamos os seguintes ex-alunos: Pierson Félix, Juanbélia Ferreira, Allan George, Geovany Patrício, Lívia Tito e João Batista.

Campina Grande, 07 de Julho de 2025.

Severino Horácio da Silva
Vandik Estevam Barbosa
Divanilda Maia Esteves
Michelli Barros

SUMÁRIO

GEOMETRIA DE POSIÇÃO

No estudo da Geometria Euclidiana Plana, é adotada uma abordagem axiomática para fundamentar seus conceitos. Além dos axiomas bem conhecidos dessa área, apresentamos a seguir os axiomas que serão utilizados em nosso estudo:

1.1 AXIOMAS DO PLANO

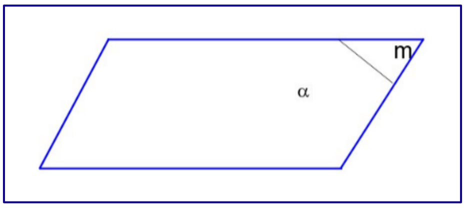
Axioma 1.1: Três pontos não colineares determinam um único plano.

Axioma 1.2: Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um mesmo plano, então esta reta está contida neste plano.

Axioma 1.3: Qualquer reta de um plano α divide esse plano em dois semiplanos distintos, cuja interseção é essa reta.

Planos são indicados por letras gregas minúsculas e representados graficamente como na Figura 1.1.

Figura 1.1: Representação de um plano



Fonte: Arquivo dos autores.

Como podemos observar pela Figura 1.1, a reta **m** traçada no plano α divide este plano em dois semiplanos sendo a reta **m** a origem desses semiplanos. Essa representação indica que o plano possui duas dimensões ou dimensão dois e, por isso, uma das medidas de qualquer figura plana limitada é a área, que está relacionada ao produto de suas duas dimensões. É importante ressaltar que, na realidade, o plano é infinito (constituído de infinitos pontos) e ilimitado.

O **Espaço** é a região tridimensional ilimitada que contém todos os pontos possíveis, permitindo a existência de objetos geométricos diversos como: retas, planos, superfícies e sólidos geométricos.

1.2 AXIOMAS DO ESPAÇO

Axioma 1.4: Qualquer plano $\boldsymbol{\beta}$ divide o espaço em dois semiespaços. O plano $\boldsymbol{\beta}$ é a origem dos dois semiespaços.

Os axiomas de Euclides, que são estudados em geometria plana, também se aplicam, é claro, à geometria espacial. Um exemplo disso é o Axioma das Paralelas:

Axioma 1.5: Dada uma reta **m**, por um ponto A não pertencente à reta **m**, passa uma única reta **r** que é paralela à reta **m**.

Definição 1.1: Duas retas **m** e **n** são coplanares quando estão contidas em um mesmo plano.

Definição 1.2: Duas retas **m** e **n** são paralelas se são coplanares e não possuem ponto em comum.

Definição 1.3: Duas retas **m** e **n** são coincidentes se possuem dois pontos em comum.

Definição 1.4: Duas retas **m** e **n** são concorrentes se possuem um único ponto em comum.

Definição 1.5: Duas retas **m** e **n** são reversas se não existe um plano que as contém.

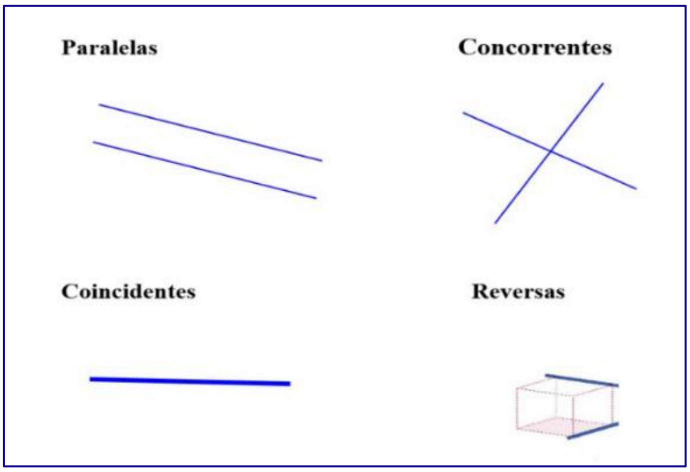
Definição 1.6: Duas retas **m** e **n** são perpendiculares se são concorrentes e formam ângulo de concorrência reto.

Definição 1.7: Duas retas **m** e **n** são ortogonais se existir uma reta **r** paralela a uma delas e perpendicular à outra.

1.3 POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS

Duas retas no espaço podem ser paralelas, concorrentes, coincidentes ou reversas. Na Figura 1.2, mostramos a representação dessas retas.

Figura 1.2: Posições relativas de duas retas



Fonte: Arquivo dos autores.

1.4 DETERMINAÇÃO DE UM PLANO

Um plano pode ser determinado de quatro maneiras:

1. Por três pontos não colineares. (Conforme Axioma 1.1)
2. Por uma reta e um ponto não pertencente a ela.
3. Por duas retas concorrentes.
4. Por duas retas paralelas.

1.5 EXERCÍCIOS

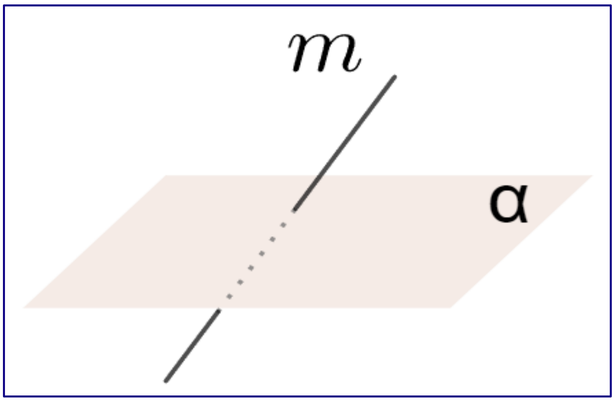
1. Justifique os itens (2), (3) e (4) da determinação de plano.
2. Para cada proposição abaixo, indique se ela é verdadeira ou falsa e apresente uma justificativa:
   a) Por um ponto passam infinitas retas.
   b) Por dois pontos passa uma única reta.
   c) Quaisquer três pontos determinam um único plano.
   d) Duas retas determinam um único plano.
   e) Por dois pontos fora de uma reta passam duas retas paralelas a esta reta.
   f) Um ponto e uma reta determinam um plano.
   g) Três retas paralelas distintas determinam um único plano.
   h) Um ponto e uma reta podem determinar um plano.
   i) Três pontos distintos determinam um único plano.
   j) Três retas não paralelas determinam um único plano.
   k) Três pontos não colineares determinam um único plano.
   l) Por dois pontos distintos passa uma única reta.
   m) Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar infinitas retas reversas com ela.
   n) Duas retas reversas estão em planos distintos.
   o) Um ponto fora de uma reta determina com esta reta um único plano.
   p) Duas retas perpendiculares determinam um único plano.
3. Desenhe pares de retas que sejam:
   a) paralelas
   b) coincidentes
   c) concorrentes
   d) reversas

1.6 POSIÇÕES RELATIVAS DE UMA RETA E UM PLANO

No espaço, uma reta pode assumir diferentes posições em relação a um plano:

- **contida no plano:** quando a reta e o plano possuem pelo menos dois pontos distintos em comum (Axioma 1.2);
- **paralela ao plano:** quando a reta e o plano não possuem ponto em comum;
- **concorrente ou incidente ao plano:** quando a reta e o plano possuem um único ponto em comum. Neste caso, dizemos que a reta intersecta ou atravessa o plano;

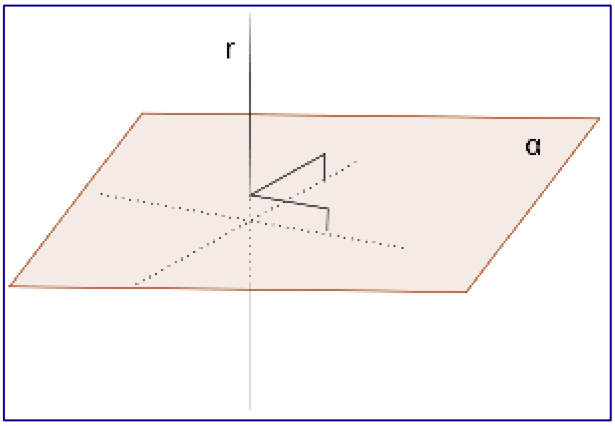
Figura 1.3: Reta incidente a um plano



Fonte: Arquivo dos autores.

- **perpendicular ao plano em um ponto:** quando a reta é perpendicular a duas retas contidas no plano, concorrentes no ponto em que a reta atravessa o plano.

Figura 1.4: Reta perpendicular a um plano



Fonte: Arquivo dos autores.

1.7 POSIÇÕES RELATIVAS DE DOIS PLANO

No espaço, dois planos podem ocupar as seguintes posições:

- **Coincidentes:** têm duas retas não coincidentes em comum;

- **Paralelos:** não possuem ponto em comum;

Figura 1.5: Planos paralelos

Fonte: Arquivo dos autores.

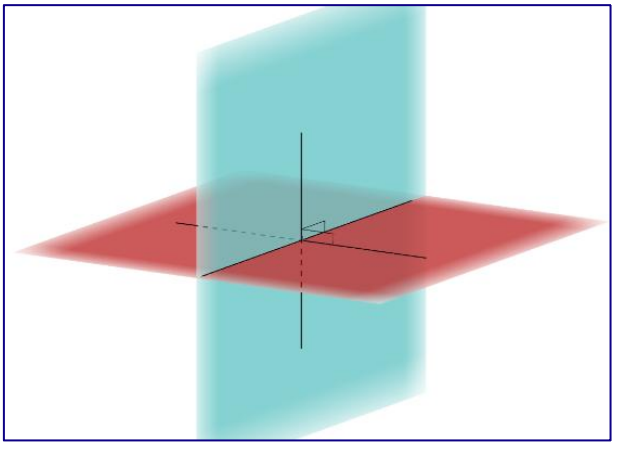
- **Secantes ou concorrentes:** possuem uma única reta em comum;

Figura 1.6: Planos concorrentes

Fonte: Arquivo dos autores.

- **Perpendiculares:** um deles contém uma reta perpendicular ao outro.

Figura 1.7: Planos perpendiculares



Fonte: Arquivo dos autores.

Aqui cabe uma observação e uma pergunta.

Observação: Se uma reta **m** é perpendicular a um plano α, existem infinitos planos que contêm esta reta **m** e que são perpendiculares ao plano α.

Pergunta: Se uma reta **m** não é perpendicular a um plano α, quantos planos passam por **m** e são perpendiculares a α?

1.8 EXERCÍCIOS

1. Para cada proposição abaixo, indique se ela é verdadeira ou falsa e apresente uma justificativa:

a) Por um ponto fora de um plano passam infinitas retas paralelas a este plano.

b) Duas retas reversas estão em planos que são paralelos.

c) Duas retas que estão em planos paralelos são paralelas.

d) Duas retas que possuem um ponto em comum são coplanares.

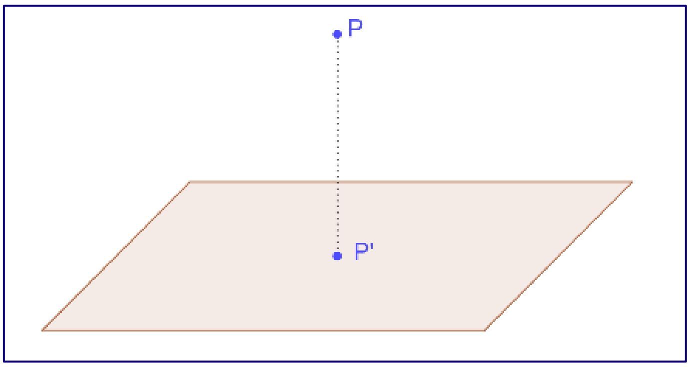
1.9 PROJEÇÕES ORTOGONAIS SOBRE UM PLANO

1.9.1 PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UM PONTO

A projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α é o ponto P´ pé da perpendicular baixada do ponto P sobre o plano α.

É claro que, se P está em α então P´≡ P.

Figura 1.8: Projeção de um ponto sobre um plano



Fonte: Arquivo dos autores.

1.9.2 PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UMA RETA

A projeção ortogonal de uma reta **m** sobre um plano α é a reta **n** que passa pelos pontos A' e B', projeções ortogonais sobre o plano α, dos pontos distintos A e B pertencentes à reta **m**.

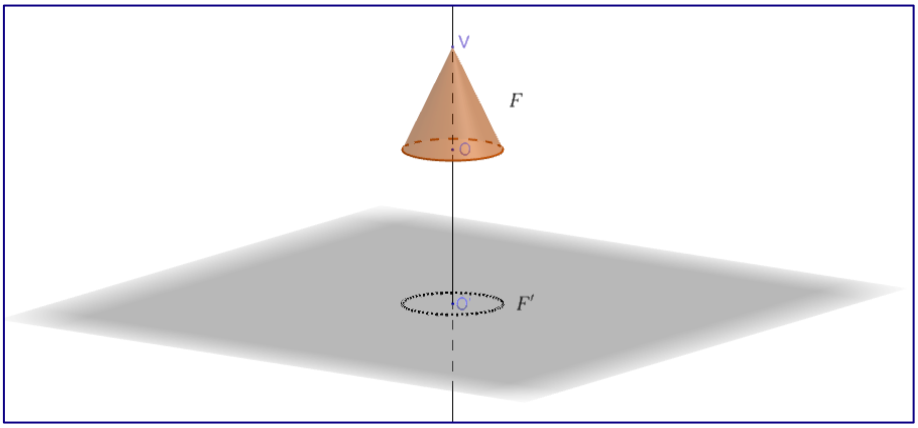
Observe que se a reta **m** for perpendicular ao plano α A' e B' coincidem, ou seja, a projeção de **m** sobre α é um ponto. E, se **m** for paralela ao plano α as retas **m** e **n** são paralelas.

1.9.3 PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UMA FIGURA GEOMÉTRICA

Qualquer conjunto de pontos é considerado uma figura geométrica.

A projeção ortogonal de uma figura geométrica F sobre um plano α é o conjunto F' da projeção de todos os pontos da figura F sobre o plano α.

Figura1.9: Projeção de uma figura sobre um plano

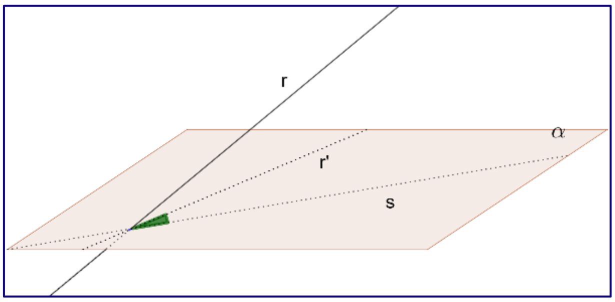


Fonte: Arquivo dos autores.

1.10 ÂNGULO ENTRE RETA E PLANO

O ângulo formado por uma reta **r** e um plano α é o ângulo entre as retas **r´** (projeção da reta **r** sobre o plano α) e **r**. Quando a reta **r** for perpendicular ao plano α esse ângulo será reto.

Figura 1.10: Representação de ângulo entre uma reta e um plano



Fonte: Arquivo dos autores.

Observe que:

a) o ângulo entre **r** e α será agudo se **r** é incidente ao plano α.

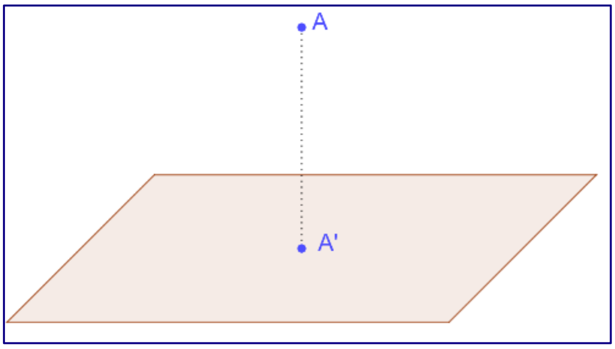
b) o ângulo entre **r** e α será zero se **r** e α são paralelos ou se α contém **r**.

1.11 DISTÂNCIAS

1.11.1 DISTÂNCIA DE UM PONTO A UM PLANO

A distância de um ponto $\boldsymbol{A}$ a um plano α é o comprimento do segmento unindo o ponto $\boldsymbol{A}$ ao ponto $\boldsymbol{A}'$ projeção do ponto $\boldsymbol{A}$ sobre o plano α.

Figura 1.11: Distância de ponto a plano



Fonte: Arquivo dos autores.

1.11.2 DISTÂNCIA DE UMA RETA A UM PLANO PARALELO

A distância de uma reta **r** a um plano α, paralelo à reta **r**, é a distância de qualquer ponto da reta **r** ao plano α.

1.11.3 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PLANOS PARALELOS

A distância entre dois planos α e β paralelos é a distância entre um ponto do plano α e o plano β.

1.12 EXERCÍCIOS

1. Defina distância entre duas retas reversas.
2. Para cada proposição abaixo, indique se ela é verdadeira ou falsa e apresente uma justificativa:
   - **a)** Se as retas **m** e **n** não têm ponto em comum, então **m** e **n** são coincidentes.
   - **b)** Se as retas **m** e **n** não têm ponto em comum, então **m** e **n** são concorrentes.
   - **c)** Se as retas **m** e **n** têm em comum somente o ponto P, então **m** e **n** são concorrentes.
   - **d)** Se as retas **m** e **n** são coplanares e não têm ponto em comum, então **m** e **n** são paralelas.
   - **e)** Se P e Q são pontos de uma reta **m** e P e Q estão num plano α, então **m** está em α.
   - **f)** Se a reta **n** não tem ponto em comum com o plano α então **n** é paralela a α.
   - **g)** Duas retas reversas nunca são coplanares.
   - **h)** Uma reta paralela a um plano pode ser reversa com qualquer reta deste plano.
   - **i)** Dada uma reta **m** existe uma única reta **n** no plano α que é paralela a **m**.

j) Se duas retas **m** e **n** reversas furam um plano α, então existe uma reta **t** em α que é concorrente com **m** e **n**.

k) A interseção entre dois planos nunca é vazia.

l) A interseção entre dois planos sempre é uma reta.

m) Se P é um ponto de interseção de um plano α com a reta **m**, então **m** fura o plano α no ponto P.

n) A interseção entre dois planos secantes é sempre uma reta.

o) Se uma reta **m** do plano α é perpendicular a uma reta **n** do plano β, então os planos α e β são perpendiculares.

p) Se uma reta **m** do plano α é perpendicular ao plano β, então os planos α e β são perpendiculares.

q) Se os planos α e β não possuem ponto em comum, então α e β são paralelos. α Se a reta **m** não é perpendicular ao plano α, então existe um único plano β que contém a reta **m** e é perpendicular ao plano α.

r) Se P é um ponto do plano α, então existe um único plano β que contém P e é perpendicular ao plano α.

s) Se P é um ponto do plano α, então existem infinitos planos que contém P e são perpendiculares ao plano α.

t) Se uma reta **m** não é perpendicular nem paralela a um plano β, então a projeção de **m** sobre β forma um ângulo agudo com **m**.

u) Se duas retas **m** e **n** são paralelas, então elas formam com qualquer plano β ângulos congruentes.

v) A distância entre dois planos paralelos β e γ é igual à distância entre uma reta de β e uma de γ.

POLIEDROS

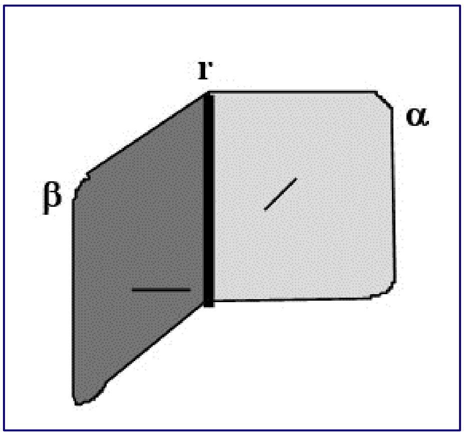
Neste capítulo introduzimos o estudo dos poliedros. Iniciamos apresentando os diedros e ângulos poliédricos. Em seguida definimos poliedros e apresentamos seus elementos, classificação e algumas propriedades.

2.1 DIEDROS

Definição 2.1: Chama-se **diedro** ou **ângulo diédrico** a figura formada por dois semiplanos de mesma origem.

Na Figura 2.1, apresentamos a representação gráfica de um diedro.

Figura 2.1: Representação gráfica de um diedro



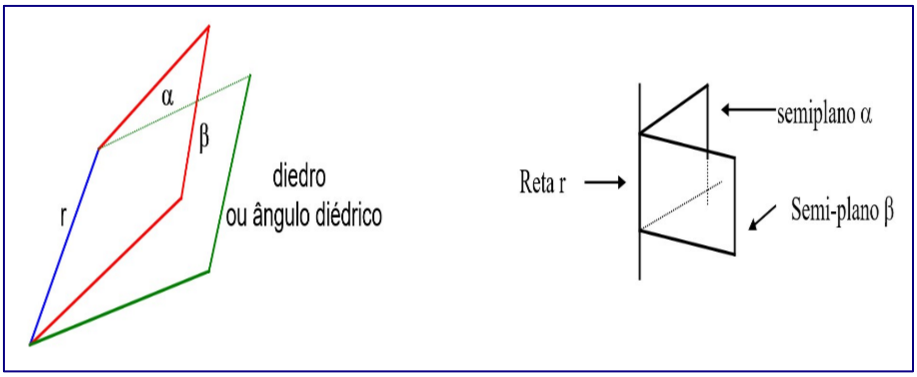
Fonte: Arquivo dos autores.

Definição 2.2: Consideremos uma reta **r** no espaço e dois semiplanos, α e β de mesma origem **r**. Estes dois semiplanos divide o espaço em duas regiões. A cada uma dessas regiões, reunidas com α e β denominamos **setor diedral** ou **ângulo sólido**, determinado pelos semiplanos α e β.

Denotamos o diedro determinado por α, **r** e β por di(α **r** β) ou di(α, β).

Os semiplanos α e β são as faces do diedro di(α **r** β) e **r** (reta origem dos dois semiplanos) sua aresta. Na Figura 2.2 apresentamos essa representação. Se os semiplanos forem perpendiculares o diedro é dito **diedro reto** (Figura 2.2- lado direito).

Figura 2.2: Representação de diedros



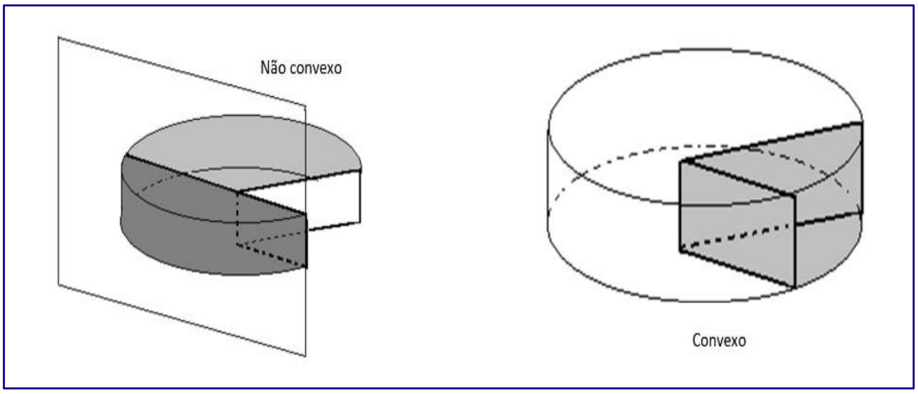
Fonte: Arquivo dos autores.

2.1.1 SETORES DIEDRAIS: CONVEXOS E NÃO-CONVEXOS

O setor diedral é **convexo** quando o plano que contém uma face deixa todo o ângulo no mesmo semiespaço.

O setor diedral é **não convexo** quando o plano de uma face divide o ângulo diédrico em duas partes.

Figura 2.3: Diedro convexo e diedro não convexo

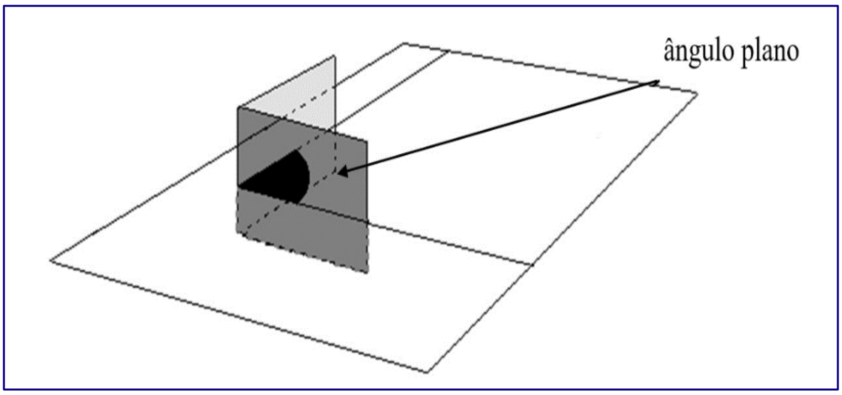


Fonte: Arquivo dos autores.

2.1.2 SECÇÃO DE UM DIEDRO

A interseção de um diedro com um plano que é concorrente com sua aresta é chamada de secção desse diedro; essa secção forma **um ângulo plano**. Se o plano que intersecta o diedro é perpendicular à sua aresta, então a secção é denominada **reta** (ou **normal**) (ver Figura 2.4).

Figura 2.4: Secção normal de um diedro



Fonte: Arquivo dos autores.

Observação: As secções normais de um mesmo diedro são congruentes, pois formam ângulos planos congruentes.

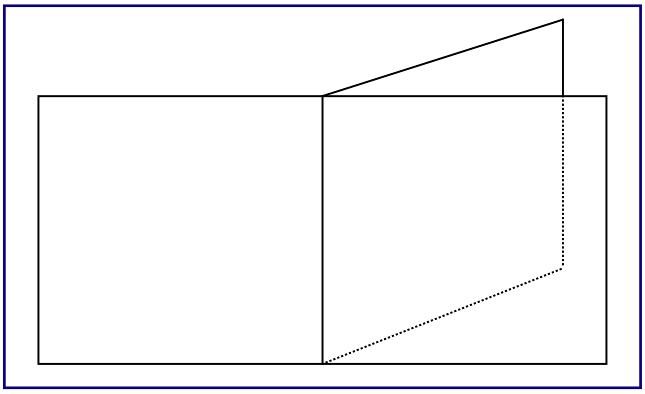
2.1.3 CONGRUÊNCIA DE DIEDROS

Definição 2.3: Dois ângulos diédricos são congruentes se, e somente se, uma secção normal de um deles é congruente a uma secção normal do outro.

Observação: A medida de um ângulo diedro é determinada pela medida de uma de suas secções normais. Assim, podemos classificar os diedros em: nulo, agudo, reto, obtuso ou raso, da mesma forma que classificamos os ângulos. Além disso, é possível termos diedros complementares ou suplementares, assim como acontece com os ângulos.

Definição 2.4: Dizemos que dois diedros são **adjacentes** se eles têm uma face comum e as outras estão situadas uma em cada semiespaço determinado pela face comum. (Ver Figura 2.5)

Figura 2.5: Diedros adjacentes



Fonte: Arquivo dos autores.

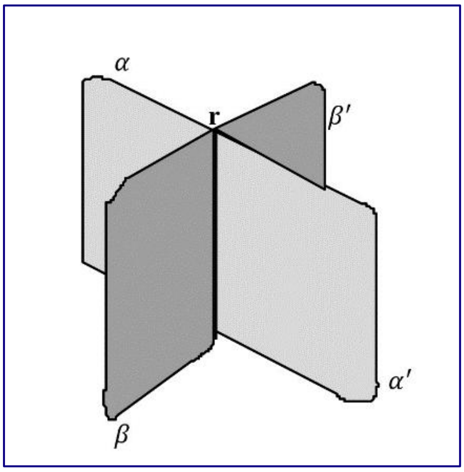
Observação: Se dois diedros são adjacentes, eles têm secções normais que são ângulos adjacentes.

Definição 2.5: Dois diedros são **opostos pela aresta**, quando as faces de um são os prolongamentos das faces do outro.

Observação:

1. Dois diedros opostos pela aresta são congruentes, pois seus ângulos planos são congruentes, já que são opostos pelo vértice.
2. Dois planos secantes como os da Figura 2.6 determinam quatro diedros: di(α **r** β) , di(α **r**β'), di(α' **r** β), di(α' **r** β').

Figura 2.6: Planos secantes



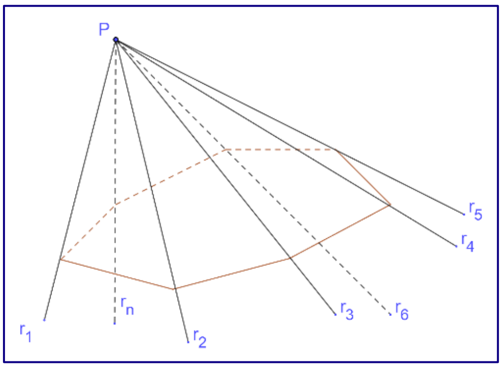
Fonte: Arquivo dos autores.

Definição 2.6: Dizemos que di(α **r** β) e di(α' **r** β') são diedros opostos pela aresta, o mesmo ocorre com os diedros di(α **r**β') e di(α' **r** β). (Ver Figura 2.6)

Definição 2.7: Considere as semirretas $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n$ todas com origem em um único ponto P, das quais três quaisquer delas são não coplanares. A figura formada pelas regiões angulares determinadas por $r_1r_2, r_2r_3, \cdots, r_{n-1}r_n, r_nr_1$ denomina-se ângulo poliédrico.

O ponto P é o vértice do ângulo poliédrico, as regiões angulares são suas faces e as semirretas são suas arestas.

Figura 2.7: Ângulo poliédrico



Fonte: Arquivo dos autores.

Observação: Um ângulo poliédrico possui tantos ângulos diédricos quantas forem as suas arestas. Designa-se um ângulo poliédrico pela letra de seu vértice seguida das semirretas de suas arestas ou simplesmente pela letra de seu vértice.

O ângulo poliédrico divide o espaço em duas regiões. A cada uma dessas regiões, reunidas com as regiões angulares denominamos setor poliédrico ou ângulo sólido.

Definição 2.8: Diz-se que um ângulo sólido é convexo quando, em relação aos planos de cada uma de suas faces, está todo situado num mesmo semiespaço. Caso contrário, diz-se que o ângulo sólido é côncavo (ou não convexo).

2.2 TRIEDROS

Definição 2.9: Sejam a_1, a_2e a_3 semirretas distintas, não coplanares, de origem V. Chama-se triedro $Va_1a_2a_3$,o ângulo poliédrico determinado pelas três semirretas a_1, a_2 e a_3.

O ponto V é chamado vértice do triedro; as semirretas a_1, a_2 e a_3 são suas arestas e as regiões angulares determinadas a_1a_2, a_2a_3 e a_3a_1, são suas faces.

A medida de uma face do triedro é a medida do ângulo que a constitui.

2.2.1 SECÇÃO DE UM TRIEDRO

A secção de um triedro é um triângulo com um único vértice em cada aresta.

Definição 2.10: Um triedro é dito tri retângulo ou tri retangular se suas faces são regiões angulares retas e cujos diedros são retos.

2.2.1 CONGRUÊNCIA DE TRIEDROS

Dois triedros são congruentes se, e somente se, for possível estabelecer uma correspondência entre as arestas de um e as do outro, de modo que:

I. Os diedros de um sejam ordenadamente congruentes aos diedros do outro;

II. As faces de um sejam ordenadamente congruentes as faces do outro.

Propriedades dos triedros: Em qualquer triedro, tem-se:

1) a medida de cada face é menor que a soma das medidas das outras duas faces;

2) a soma das medidas das faces é menor que 360°;

3) a medida de cada face é maior que a diferença das medidas das outras duas.

Simbolizando por f_1 a medida, em graus, de $\widehat{a_1 a_2}$ (0°< f_1 < 180°); f_2 a medida, em graus, de $\widehat{a_2 a_3}$ (0°< f_2 < 180°) e f_3 a medida, em graus, de $\widehat{a_1 a_3}$ (0°< f_3 <180°) temos:

$$f_1 < f_2 + f_3, \quad f_2 < f_1 + f_3, \quad f_3 < f_1 + f_2$$
$$f_1 > f_2 - f_3, \quad f_2 > f_1 - f_3\ , \quad f_3 > f_1 - f_2$$

e

$$f_1 + f_2 + f_3 < 360°.$$

2.3 POLIEDROS

Definição 2.11: Poliedro é um sólido fechado limitado por regiões poligonais planas, das quais duas quaisquer delas nunca estão no mesmo plano nem tem ponto interior em comum e, cada lado de uma região poligonal não seja comum a mais de duas regiões.

O conjunto das regiões poligonais que limitam o poliedro é chamada **superfície poliédrica.**

2.3.1 ELEMENTOS DE UM POLIEDRO

I. As regiões que limitam o sólido são denominadas faces;

II. A interseção de duas faces dá origem a uma aresta;

III. A interseção de três ou mais arestas dá origem aos vértices do poliedro.

Definição 2.12: Um sólido cujo plano de cada face divide o espaço de tal modo que deixa, no mesmo semiespaço todas as outras faces é chamado de poliedro convexo.

Definição 2.13: Um sólido que pode ser dividido em duas ou mais partes por um plano que contenha uma de suas faces é denominado de poliedro não-convexo.

2.3.2 POLIEDRO REGULAR E NÃO-REGULAR

Para finalidade didática é conveniente agrupar os poliedros em duas categorias: poliedros regulares e poliedros não-regulares.

Dizemos que um poliedro é **regular** se ele é convexo, suas faces são regiões poligonais regulares, congruentes entre si, e em cada vértice encontram-se o mesmo número de arestas, caso contrário dizemos que o poliedro é **não-regular**.

Estudaremos, no próximo capítulo, alguns poliedros não-regulares nesta ordem: prisma, paralelepípedo, pirâmide e tronco de pirâmide.

2.3.3 PROPRIEDADES DOS POLIEDROS

Lema 2.1 (Lema de Euler): Em toda superfície poliédrica convexa aberta, vale a seguinte relação:

$$V - A + F = 1,$$

em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces.

Prova: Para provar esse resultado usamos indução matemática finita sobre F:

1. Suponhamos uma superfície poliédrica convexa de uma só face (polígono convexo). Verifiquemos que a fórmula dada acima é verdadeira. Como $F = 1$ e $A = V$ temos

$$V - A + F = 1.$$

2. Considere a relação verdadeira, para uma superfície poliédrica aberta convexa de K faces, isto é,

$$V - A + K = 1 \qquad \textbf{(hipótese de indução)}.$$

3. Provemos, agora, que a relação vale para uma superfície poliédrica aberta convexa com $(K + 1)$ faces.

Suponhamos que ao se acrescentar a $(K+1)$-ésima face, de m lados (aresta do polígono da face), ocorra que n lados coincidam com as arestas anteriores; assim $n+1$ vértices coincidirão. Desta forma, n arestas coincidem e são acrescentados $m-n$ arestas e $m-(n+1)$ vértices.

Logo, sendo V', A' e F' os novos números, respectivamente, de vértices, de arestas e de faces desta superfície, temos:

$$\begin{aligned}
V' &= V + m - (n+1)\\
A' &= A + (m-n)\\
F' &= K + 1\\
V' - A' + F' &= V + m - n - 1 - A - m + n + K + 1\\
&= V - A + K.
\end{aligned}$$

Mas, por hipótese de indução, $V - A + K = 1$.

Portanto, para qualquer que seja F, temos

$$V - A + F = 1,$$

o que prova o lema.

Teorema 2.1 (Teorema de Euler-Descartes): Em todo poliedro convexo, ou superfície poliédrica convexa fechada, vale a relação:

$$V - A + F = 2.$$

Prova: Considere um poliedro convexo qualquer com F faces. Retiremos uma face desse poliedro. Desse modo recaímos no lema de Euller, onde vale a relação:

$$V - A + F' = 1,$$

onde $F' = F - 1$.

Quando se recoloca a face retirada, o número V de vértices e o número A de arestas não sofrem qualquer alteração, e a substituição de F' resulta:

$$V - A + F - 1 = 1,$$

ou seja,

$$V - A + F = 2.$$

2.3.3.1 Poliedros Eulerianos

São aqueles poliedros que satisfazem ao Teorema de Euler-Descartes

$$V - A + F = 2.$$

2.3.3.2 Poliedros de Platão

São todos os poliedros Eulerianos que satisfazem às duas condições seguintes:

I. todas as faces são polígonos com o mesmo número de arestas;

II. em cada vértice concorrem o mesmo número de arestas.

Teorema 2.2: Existem 5 e, somente 5, classes de poliedros de Platão.

Prova: Considere um poliedro de Platão, isto é, que obedeça a relação

$$V - A + F = 2, \tag{2.1}$$

que tenha r lados em cada face e que concorram m arestas em cada vértice. Como cada aresta figura em duas faces:

$$rF = 2A,$$

ou seja,

$$F = \frac{2A}{r} \tag{2.2}$$

e cada aresta contém dois vértices:

$$mV=2A,$$

ou seja,

$$V = \frac{2A}{m}. \tag{2.3}$$

Substituindo (2.2) e (2.3) em (2.1), temos:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{r} = 2 \qquad (2.4)$$

Sendo $2A \neq 0$ (pois A é o número de arestas do poliedro), dividimos cada membro da equação (2.4) por $2A$, obtendo:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{A}$$

ou seja,

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{r} = \frac{1}{A} + \frac{1}{2}. \qquad (2.5)$$

Daí, sendo $A > 0$, temos que,

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{r} > \frac{1}{2}. \qquad (2.6)$$

Como $m \geq 3$ e $r \geq 3$ (número de arestas de uma face), podemos ver que m e r não podem ser simultaneamente maiores que 3, pois:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

e o primeiro membro de (2.6) deve ser maior do que $\frac{1}{2}$.

Fixando-se $m = 3$, teremos em (2.6):

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{r} > \frac{1}{2}\text{, ou seja, } \frac{1}{r} > \frac{1}{6},$$

o que implica em $r < 6$, isto é, ($r \in \{3,4,5\}$).

Analogamente, fixando-se $r = 3$, teremos em (2.6):

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{3} > \frac{1}{2}\text{, ou seja, } \frac{1}{m} > \frac{1}{6},$$

Implicando em $m < 6$, isto é, (m $\in \{3,4,5\}$).

Como, simultaneamente, não podemos ter m e r maiores que 3, restam 5, e apenas 5, possibilidades. O que demonstra o teorema.

Assim, a partir das expressões (2.2), (2.3) e (2.5), obtemos a Tabela 1, que representa a denominação dos poliedros de Platão.

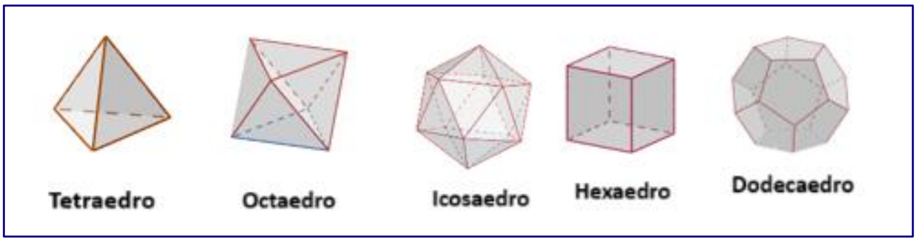
Tabela 1: Denominação dos poliedros de platão

r	m	A	V	F	Denominação do Poliedro
3	3	6	4	4	Tetraedro
3	4	12	6	8	Octaedro
3	5	30	12	20	Icosaedro
4	3	12	8	6	Hexaedro
5	3	30	20	12	Dodecaedro

Fonte: Arquivo dos autores.

A seguir ilustramos as cinco classes dos poliedros de Platão com os poliedros regulares: tetraedro, octaedro, cubo (ou hexaedro), dodecaedro e icosaedro (ver Figura 2.8).

Figura 2.8: Poliedros de Platão



Fonte: Arquivo dos autores.

Teorema 2.3: A soma das medidas dos ângulos das faces de um poliedro Euleriano convexo é dada por:

$$S = (V - 2) \cdot 360^o,$$

em que V é o número de vértices do poliedro.

Prova: Como cada face é um polígono convexo, a soma das medidas dos ângulos de uma face é dada por $(n - 2) \cdot 180^o$, onde n é o número de lados dessa face.

Como são F faces, teremos:

$$\begin{aligned} S &= (n_1 - 2) \cdot 180° + (n_2 - 2) \cdot 180° + \cdots + (n_F - 2) \cdot 180° \\ &= [(n_1 + n_2 + \cdots + n_F) - 2F] \cdot 180° \end{aligned}$$

mas, $(n_1 + n_2 + \cdots + n_F) = 2A$, então

$$S = 2A \cdot 180° - F \cdot 360°$$
$$= (A - F) \cdot 360°.$$

Como $V - A + F = 2$, então $V - 2 = A - F$. Daí, segue que

$$S = (V - 2).360°.$$

2.3.4 EXERCÍCIOS

1. Defina:

a) diagonal de um poliedro.

b) plano diagonal de um poliedro.

2. Quantos diedros possui um poliedro?

3. Quantos ângulos poliédricos possui um poliedro?

4. Construa um poliedro com 8 faces das quais 2 são quadriláteros e 6 são triângulos.

a) Quantas arestas, quantos diedros, quantos vértices e quantos ângulos poliédricos possui este poliedro?

b) Quantos ângulos poliédricos são triedros? E tetraedros?

5. Um poliedro convexo possui faces triangulares e quadrangulares, sendo ao todo 7 faces. Se o poliedro possui 7 vértices, determine o número de faces de cada espécie.

6. Calcule o número de diagonais do dodecaedro regular.

7. Verifique que a soma das medidas de todas as faces de um ângulo poliédrico convexo é menor que 360º.

8. Quantos são os vértices de um poliedro convexo de 8 faces, todas triangulares?

9. Um poliedro convexo de 24 arestas tem apenas faces triangulares e hexagonais. A soma das medidas dos ângulos das faces é 4320º. Determinar:

a) quantos vértices e quantas faces tem o poliedro.

b) qual o número de faces de cada tipo.

10. Dado um octaedro regular cujas arestas medem 8cm, considera-se o hexaedro inscrito no octaedro, cujos vértices coincidem com os pontos médios de 8 de suas arestas. Pergunta-se:

a) Em que condições o hexaedro é regular?

b) Quanto mede cada aresta do hexaedro?

11. Seccionar um cubo de modo que a secção seja um hexágono. Justificar a solução.

12. Verifique se a definição de poliedro dada abaixo está correta. Caso você não a considere correta, exiba um exemplo que justifique sua resposta. (Nota: um tal exemplo é chamado um contraexemplo e serve para justificar a falsidade de uma proposição).

PRISMA E PIRÂMIDE

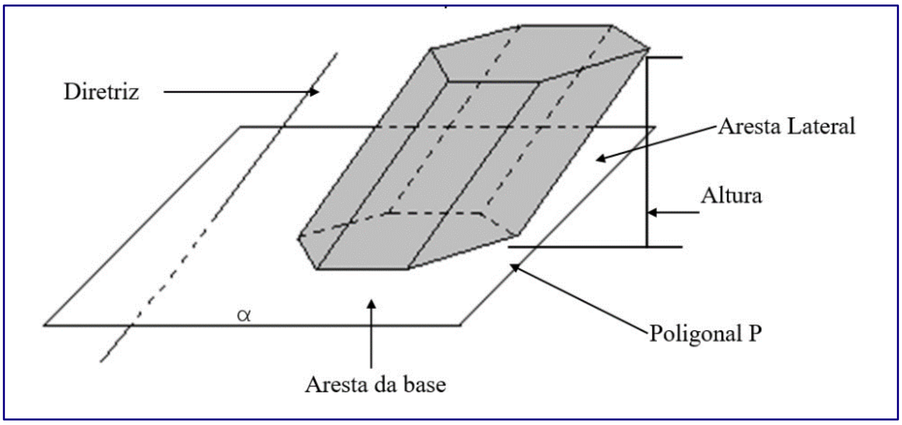
Este capítulo é dedicado ao estudo de dois casos particulares de poliedros irregulares que são os prismas e as pirâmides. Além das definições, elementos e classificação dos prismas e pirâmides, apresentamos os cálculos das áreas e dos volumes desses sólidos e do sólido conhecido como tronco de pirâmide, o qual é obtido ao seccionarmos uma pirâmide com um plano paralelo ao plano que contém sua base e que corta todas suas arestas.

3.1 PRISMA

Consideremos dois planos α e β, distintos e paralelos; uma região poligonal P contida em α e uma reta **r** concorrente com β.

Definição 3.1: Definimos **prisma** como sendo a reunião de todos os segmentos de reta paralelos a $\boldsymbol{r}$, com uma extremidade em P e outra em β.

Figura 3.1: Prisma e suas partes



Fonte: Arquivo dos autores.

3.1.1 ELEMENTOS OU PARTES DE UM PRISMA

Os elementos ou partes de um prisma são ilustrados na Figura 3.1 e definidos a seguir.

1. **Bases do prisma:** são as regiões poligonais (faces do prisma) contidas nos planos paralelos α e β.
2. **Aresta da base:** é cada lado das regiões poligonais das bases.
3. **Aresta lateral:** as arestas não situadas nas bases do prisma são suas arestas laterais.
4. **Face lateral**: são as faces do prisma que não constituem as bases. Elas têm formato de paralelogramos.

5. **Altura do prisma**: é a distância entre os dois planos paralelos que contém as bases do prisma.
6. **Vértices**: os pontos de interseção de três ou mais arestas são chamados de vértices do prisma.

3.1.2 DESIGNAÇÃO DOS PRISMAS

Os prismas são designados de acordo com o número de lados dos polígonos que geram suas bases. Por exemplo:

- **Prisma triangular:** a base é um triângulo;
- **Prisma quadrangular:** a base é um quadrilátero;
- **Prisma pentagonal:** a base é um pentágono;

e assim sucessivamente.

3.1.3 CLASSIFICAÇÃO DOS PRISMAS

- **Prisma reto:** Dizemos que um prisma é reto quando suas arestas laterais são perpendiculares às bases. Num prisma reto as arestas laterais têm a mesma medida da altura e as faces laterais são retângulos.
- **Prisma oblíquo:** Dizemos que um prisma é oblíquo quando as arestas laterais forem oblíquas às bases. Num prisma oblíquo as faces laterais são paralelogramos e a medida das arestas laterais é diferente da medida da altura.
- **Prisma regular:** Dizemos que um prisma reto é regular quando suas bases são polígonos regulares. Num prisma regular, as faces laterais são retângulos congruentes e as arestas laterais são perpendiculares às bases.

3.1.4 CASOS ESPECIAIS DE PRISMA

- **Paralelepípedo**: São prismas cujas bases são paralelogramos.
- **Paralelepípedo reto**: É o prisma reto cujas bases são paralelogramos.
- **Paralelepípedo retângulo ou ortoedro**: É o paralelepípedo reto cujas bases são retângulos.
- **Cubo (hexaedro regular)**: É um paralelepípedo retângulo no qual todas as arestas são congruentes.

Observações:

1. As faces de um cubo são quadrados, por serem retângulos de lados congruentes.
2. Os planos das faces opostas de um paralelepípedo são paralelos e suas faces opostas são congruentes.

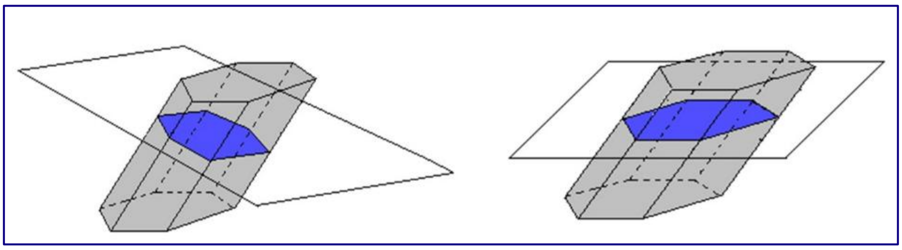
Pergunta: Um prisma regular é um poliedro regular?

3.1.5 SECÇÃO DO PRISMA

A interseção do prisma com um plano que intersecta todas as suas arestas laterais é chamada **de secção do prisma** (ver Figura 3.2).

A secção determinada por um plano paralelo às bases é chamada de secção reta.

Figura 3.2: Secção do prisma



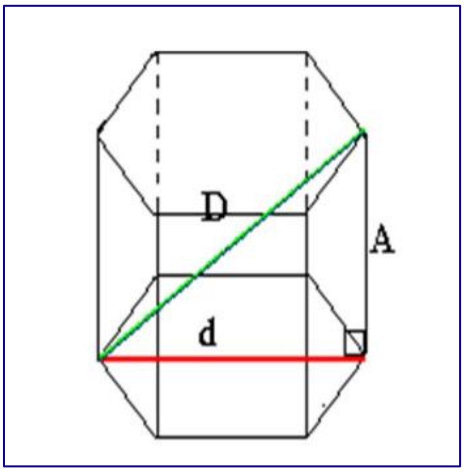
Fonte: Arquivo dos autores.

3.1.6 DIAGONAL DO PRISMA RETO

Diagonal de um prisma é todo segmento cujas extremidades são vértices desse prisma e que não pertencem a uma mesma face.

Seja d a medida de uma diagonal do polígono da base e A a medida das arestas do prisma. Já que o prisma é reto, temos que a aresta é perpendicular ao plano da base. Assim, obtemos um triângulo retângulo cuja hipotenusa é a diagonal do prisma, um dos catetos é a aresta lateral e o outro cateto é a diagonal da base, conforme Figura 3.3.

Figura 3.3: Diagonal do prisma reto



Fonte: Arquivo dos autores.

Assim, com a notação da Figura 3.3, temos a relação

$$D^2 = d^2 + A^2,$$

em que A é a medida da aresta lateral, d é a medida de uma diagonal da base do prisma e D a medida de uma diagonal do Prisma.

3.1.7 SUPERFÍCIE DO PRISMA

a. Superfície lateral de um prisma é a união das faces laterais.

b. Superfície total de um prisma é a união de suas faces laterais com as bases do prisma.

3.1.8 ÁREA TOTAL DA SUPERFÍCIE DE UM PRISMA

Denotando a área lateral por A_L e a área da base por A_B, temos que a área total da superfície de um prisma é dada por:

$$A_T = A_L + 2A_B.$$

No caso particular de um prisma regular temos:

$$A_T = 2pb + 2pa = 2p(a + b),$$

em que p é o semiperímetro da base, a é o apótema da base e b é o comprimento da aresta lateral.

3.1.9 VOLUME DE UM PRISMA

Definição 3.2: O volume de um cubo de arestas unitárias é denominado unidade fundamental do volume.

Definição 3.3: O volume de um sólido é medido pela quantidade de unidades fundamentais de volume por ele ocupado no espaço.

Definição 3.4: Dizemos que dois sólidos S e S'são equivalentes se eles têm o mesmo volume, ou seja, $S \equiv S'$ se $V(S) = V(S')$.

Definição 3.5: Se o sólido S é o sólido obtido por dois sólidos S_1 e S_2 que são justapostos (têm apenas pontos de suas faces em comum), então o volume de S é a soma dos volumes de S_1 e S_2, ou seja,

$$V(S) = V(S_1) + V(S_2).$$

Teorema 3.1: Dois paralelepípedos retos que têm duas dimensões iguais e as terceiras desiguais, têm volumes proporcionais às terceiras dimensões.

Prova: Sejam $P(a,b,c)$ e $P'(a',b',c')$ dois paralelepípedos onde $a = a'$, $b = b'$ e $c \neq c'$. Então, entre c e c' poderão ocorrer dois casos:

1º caso - c e c' são comensuráveis (existe um submúltiplo comum a c e c').

Suponha que $H = V(P'')$ onde: $P''(a, b, u)$ e u é uma unidade de medida de comprimento. Pela Definição 3.5, temos que: *mu=c, nu=c'*

$$V(P) = mH \quad \text{e} \quad V(P') = nH, \ n \text{ e } m \text{ inteiros positivos.}$$

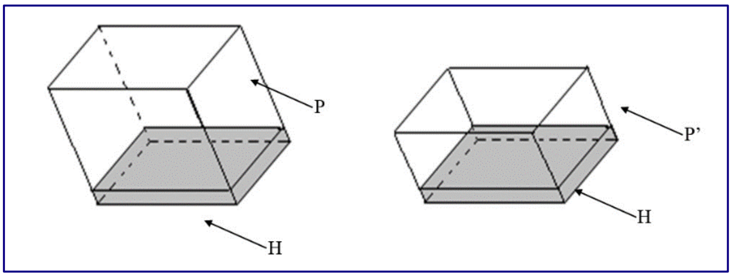
Então,

$$\frac{V(P)}{V(P')} = \frac{mH}{nH} = \frac{m}{n} = \frac{mu}{nu} = \frac{c}{c'}$$

Logo,

$$\frac{V(P)}{V(P')} = \frac{c}{c'}.$$

Figura 3.4: Paralelepípedos com duas dimensões correspondentes congruentes e as terceiras dimensões múltiplas



Fonte: Arquivo dos autores.

2º caso - c e c' são incomensuráveis (não existe um submúltiplo comum a c e c').

Considere $D = V(P'')$ onde $P''(a,b,u)$. Existem inteiros positivos m e n tais que

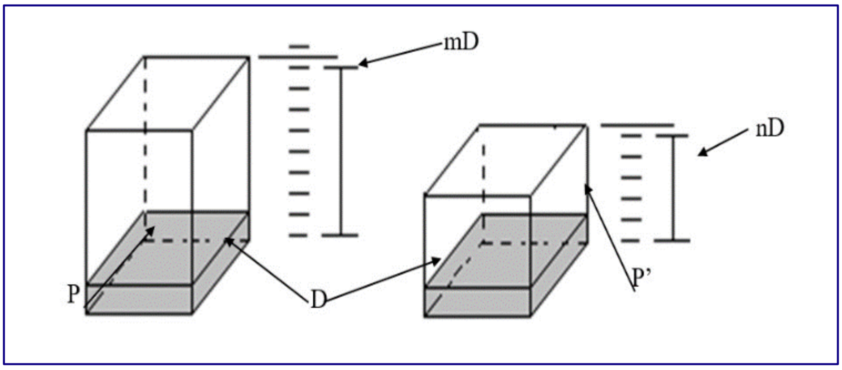
$$V(P') = nD \quad \text{e} \quad mD < V(P) < (m+1)D.$$

Daí,

$$\frac{mD}{nD} < \frac{V(P)}{V(P')} < \frac{(m+1)D}{nD}.$$

Note que, como $V(P') = nD$, as desigualdades acima têm os mesmos denominadores. E à medida que diminuímos D aumentamos m, de modo que quando D se aproxima de zero, mD e $(m + 1)D$ definem praticamente o mesmo número real.

Figura 3.5: Paralelepípedos onde uma das dimensões de um não é múltipla da dimensão correspondente do outro



Fonte: Arquivo dos autores.

Desta forma $c \approx mu$ e $V(P) \approx mD$. Então

$$\frac{V(P)}{V(P')} = \frac{mD}{nD} = \frac{m}{n} = \frac{mu}{nu} = \frac{c}{c'}$$

Ou seja,

$$\frac{V(P)}{V(P')} = \frac{c}{c'}.$$

Teorema 3.2: O volume do paralelepípedo retângulo é o produto das suas três dimensões (comprimento, altura e largura). Designando estas respectivas dimensões por a, b e c, temos.

$$V(P) = a \cdot b \cdot c.$$

Prova: Sejam os paralelepípedos: $P\ (a, b, c)$, $P'(a, b, 1)$, $P''(a, 1,1)$ e $P'''(1,1,1)$. Pelo Teorema 3.1, sendo $a = a$ e $b = b$,

$$\frac{V(P)}{V(P')} = \frac{c}{1};\quad \frac{V(P')}{V(P'')} = \frac{b}{1};\quad \frac{V(P'')}{V(P''')} = \frac{a}{1}.$$

Multiplicando-se membro a membro, temos:

$$\frac{V(P)}{V(P')} \cdot \frac{V(P')}{V(P'')} \cdot \frac{V(P'')}{V(P''')} = \frac{c}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{a}{1},$$

ou seja,

$$\frac{V(P)}{V(P''')} = a \cdot b \cdot c.$$

Como $V(P''')$ equivale a uma unidade fundamental de medida de volume, $V(P''') = 1$, logo

$$V(P) = a \cdot b \cdot c.$$

Portanto, concluímos que o volume do paralelepípedo retângulo é o produto de suas dimensões.

Corolário 3.3: O volume do paralelepípedo retângulo é igual ao produto da área da base pela altura.

Prova: Como a sua base é um retângulo, temos:

$$A_B = a \cdot b$$
$$V = a \cdot b \cdot c = A_b \cdot c.$$

Mas $como\ c = h$, temos

$$V = A_b \cdot h.$$

PRINCÍPIO DE CAVALLIÈRE: Dados dois sólidos P e P' de mesma altura, apoiados no mesmo plano α, contidos no mesmo semiespaço de modo que qualquer plano paralelo a α determine nos dois sólidos seções equivalentes, eles são equivalentes.

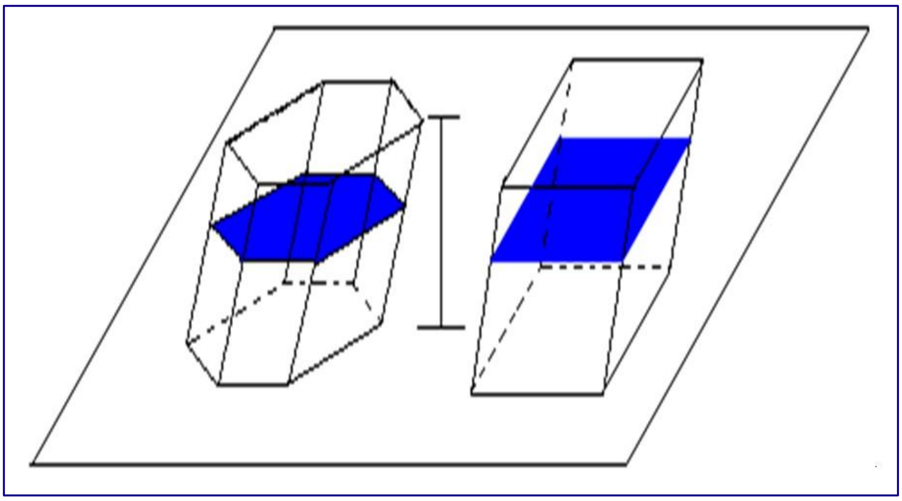
Consideremos um prisma qualquer P de base B e altura h e um paralelepípedo retângulo P' cuja base é equivalente a B e cuja altura também é h.P e P' estão apoiados num mesmo plano α e contidos no mesmo semiespaço de modo que qualquer plano paralelo a α determine secções equivalentes nos dois sólidos. Então, pelo princípio de Cavallière o volume de P e P' são iguais.

$$V(P) = V(P').$$

Como temos que $V(P') = A_B \cdot h$, concluímos que:

$$V(P) = A_B \cdot h.$$

Figura 3.6: Secções equivalentes



Fonte: Arquivo dos autores.

3.1.11 EXERCÍCIOS

1. Mostre que a área lateral de um prisma regular qualquer é o produto da medida de sua aresta lateral pelo perímetro de uma seção reta deste prisma.
2. Calcule:
   a) A área total de um paralelepípedo retângulo cujas arestas medem a, b e c.
   b) A área total de um cubo de aresta com medida a.
   c) A medida da diagonal de um paralelepípedo retângulo.
   d) A medida da diagonal de um cubo.
3. A soma das áreas de todas as faces de um cubo é Pcm^2. Qual a medida de sua diagonal?
4. Um prisma regular quadrangular tem altura igual ao dobro da diagonal da base. Sabe-se que uma das diagonais do prisma mede $D\ cm$. Calcule a área total do prisma.
5. Um prisma hexagonal regular tem altura igual ao triplo do apótema da base. Sabe-se que o raio da circunferência circunscrita à base é R cm. Calcular a área total do prisma e a medida de uma de suas diagonais.
6. São dados um prisma quadrangular regular e um prisma triangular regular de mesma altura e, ambos, com aresta da base de 3 cm. De quanto se deve aumentar a altura do segundo para se ter um prisma equivalente ao primeiro?
7. Determine a área total de um prisma triangular regular cujo volume é $4\sqrt{3}$ cm^2, sendo a altura 2/3 do perímetro da base.
8. Um cubo de aresta a é tal que o quadrado da diagonal, a área total e o seu volume são termos consecutivos de uma sequência geométrica. Determine o valor de a.

9. Em um prisma triangular oblíquo, a aresta lateral tem inclinação de 60º em relação ao plano da base. O triângulo da base é equilátero e seu lado tem a mesma medida da aresta lateral, 3 cm. Calcule o volume do prisma.

10. Um tronco de prisma tem por base inferior um triângulo equilátero de 3 cm de lado contido em um plano perpendicular à aresta lateral do prisma. Os vértices da base superior distam, respectivamente, 5 cm, 4 cm e 3 cm do plano da base inferior. Determine a área total do tronco.

11. Prove que se a, b e c são as dimensões de um paralelepípedo retângulo, S_T sua área total e D a medida de sua diagonal, então

$$a + b + c = \sqrt{D^2 + S_T}.$$

12. Calcule as dimensões de um paralelepípedo retângulo, sabendo que as mesmas estão em P. A., que a área total é de 46 cm^2 e a medida da diagonal é de $\sqrt{35}$ cm.

13. As dimensões de um paralelepípedo retângulo estão em P. G. A área total é $28m^2$ e sua diagonal mede $\sqrt{21}$m. Determine estas dimensões.

14. Calcule a medida da diagonal de um cubo, sabendo que: se aumentarmos a diagonal de 2cm, a área total aumentará de $40cm^2$.

15. Calcule a medida de uma diagonal de um prisma regular de base pentagonal, cujo lado da base mede **a** e cuja altura mede o dobro da medida do lado da base.

16. Calcule a medida de uma diagonal de um prisma regular de base hexagonal, cujo lado da base mede **a** e cuja altura mede o dobro da medida do lado da base.

17. Considere os pontos médios de três faces de um cubo de aresta 4. Calcule o perímetro e a área da região triangular cujos vértices são estes pontos. Observe os casos distintos existentes.

18. Com relação ao cubo do exercício (3), calcule:

a) diagonal da face;

b) a diagonal do cubo;

c) a área total do cubo.

d) Calcule a área total de um prisma hexagonal regular cuja aresta da base mede 10cm e cuja aresta lateral mede 20cm.

3.2 PIRÂMIDE

Consideremos uma região poligonal convexa P contida num plano α e um ponto V fora de α.

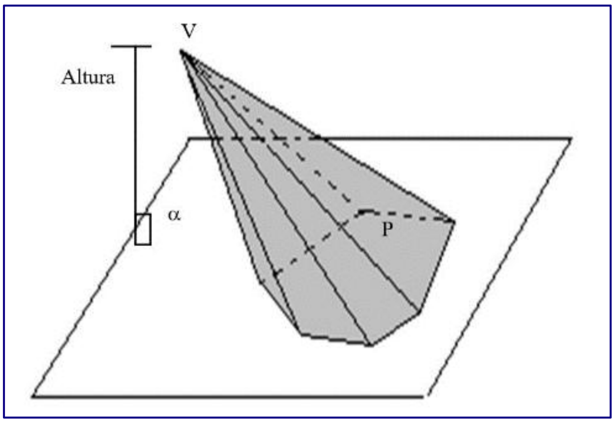
Definição 3.6: Definimos pirâmide como sendo a reunião de todos os segmentos de reta que tem uma extremidade em V e outra na região poligonal P.

3.2.1 PARTES DE UMA PIRÂMIDE

1. **Base:** é a região poligonal contida no plano α.
2. **Vértice da pirâmide:** é o ponto V, fixo fora de α.
3. **Vértice da base:** é cada vértice do polígono da base.
4. **Aresta da base:** é cada lado do polígono da base.
5. **Aresta lateral:** é cada segmento de reta que tem uma extremidade no vértice da pirâmide e outra num vértice da base.
6. **Face lateral:** é a reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no vértice da pirâmide e outra numa aresta da base. As faces laterais de uma pirâmide são limitadas pelas arestas da pirâmide.
7. **Altura:** é a distância do vértice da pirâmide ao plano da base. Baixa-se uma perpendicular ao plano α passando pelo vértice da pirâmide. O comprimento do segmento de reta com extremidades no pé da perpendicular e no vértice da pirâmide é a altura da pirâmide.

Observação: A pirâmide é um sólido delimitado por faces planas, sua base é uma região poligonal e suas faces laterais são regiões triangulares.

Figura 3.7: Pirâmide oblíqua



Fonte: Arquivo dos autores

3.2.2 CLASSIFICAÇÃO DE UMA PIRÂMIDE

Uma pirâmide pode ser: reta ou oblíqua; regular ou irregular.

- Dizemos que uma pirâmide é **reta** quando a projeção ortogonal de seu vértice sobre o plano α da base coincide com o centro da sua base. Caso contrário, dizemos que a pirâmide é **oblíqua.**
- Dizemos que uma pirâmide reta é **regular** quando sua base é um polígono regular, caso contrário, ela é dita não regular.

Numa pirâmide regular, as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são regiões triangulares isósceles congruentes.

3.2.3 DESIGNAÇÃO DAS PIRÂMIDES

Denominamos uma pirâmide de acordo com o polígono de sua base.

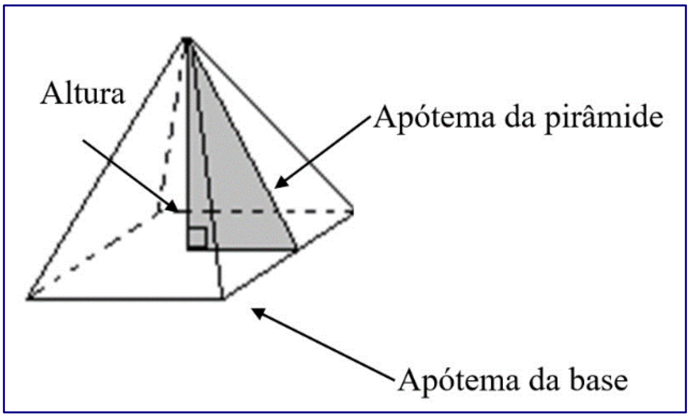
- **pirâmide triangular:** a base é um triângulo
- **pirâmide quadrangular:** a base é um quadrilátero
- **pirâmide pentagonal:** a base é um pentágono
- **pirâmide hexagonal:** a base é um hexágono

e assim sucessivamente.

3.2.4 APÓTEMA DA PIRÂMIDE REGULAR

É a altura do triângulo isóscele da face.

Figura 3.8: Apótema da pirâmide



Fonte: Arquivo dos autores

Observe que o apótema de uma pirâmide regular tem uma extremidade no vértice da pirâmide e outra no ponto médio de uma aresta da base.

Apótema da base da pirâmide: É o apótema do polígono que gera a base da pirâmide regular.

3.2.5 SUPERFÍCIES DA PIRÂMIDE

- **Superfície lateral:** é a reunião das superfícies das faces laterais da pirâmide.
- **Superfície total:** é a reunião das superfícies das faces laterais com a superfície da base.

3.2.5 ÁREA DA SUPERFÍCIE TOTAL DE UMA PIRÂMIDE

A área da superfície total de uma pirâmide, A_T, é dada por:

$$A_T = A_L + A_B$$

em que A_L (área da superfície lateral) é a soma das áreas dos triângulos formados pelas faces laterais e A_B (área da superfície da base) é a área da região poligonal base da pirâmide.

3.2.6 SEÇÃO DE UMA PIRÂMIDE

3.2.6.1 Seção paralela à base de uma pirâmide regular

Consideremos uma pirâmide triangular regular de vértice V e base ABC, onde A, B e C são os vértices do triângulo da base. Seccionando-se essa pirâmide por um plano β, paralelo ao plano α que contém sua base e que intersecta suas arestas laterais nos pontos A', B' e C', temos:

1. A seção e a base são semelhantes

   Os ângulos do ABC e do $A'B'C'$ são, respectivamente, congruentes pois os lados correspondentes são paralelos.

2. A razão de semelhança entre a seção e a base é

$$\frac{h}{H}$$

em que h é a altura da pirâmide de vértice V e base $A'B'C'$ e H é a altura da pirâmide de vértice V e base ABC.

De fato: se D é a projeção do vértice V sobre a seção e S é a projeção de V sobre a base da pirâmide, denotando semelhança de triângulos por $\approx$, obtemos o seguinte:

Da semelhança entre os triângulos VDA' e VSA, temos

$$VDA' \approx VSA: \frac{\overline{VA'}}{\overline{VA}} = \frac{\overline{VD}}{\overline{VS}}, \text{ ou seja, } \frac{\overline{VA'}}{\overline{VA}} = \frac{h}{H} \tag{3.1}$$

Da semelhança entre os triângulos $VA'B'$e VAB, temos

$$VA'B' \approx VAB: \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{VA'}}{\overline{VA}},$$

e usando (3.1), resulta em

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}} = \frac{h}{H}. \tag{3.2}$$

Da semelhança entre os triângulos $VA'C'$ e VAC, temos

$$VA'C' \approx VAC: \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{VA'}}{\overline{VA}},$$

por (3.1), obtemos

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{h}{H}. \tag{3.3}$$

Da semelhança entre os triângulos VDB' e VSB, temos

$$VDB' \approx VSB: \frac{\overline{VB'}}{\overline{VB}} = \frac{\overline{VD}}{\overline{VS}} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{VB'}}{\overline{VB}} = \frac{h}{H} \tag{3.4}$$

Da semelhança entre os triângulos VBC e $VB'C'$, temos

$$VBC \approx VB'C': \frac{\overline{VB'}}{\overline{VB}} = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{CB}} \text{ e, de acordo com (3.4), } \frac{\overline{C'B'}}{\overline{CB}} = \frac{h}{H}.$$

Daí segue-se que a razão de semelhança entre as medidas dos elementos lineares homólogos é $\frac{h}{H}$.

1. A razão de semelhança entre a área da seção, A_S, e a área da base, A_B, é $(h/H)^2$, onde H e h são como no item (2).

   De fato, considere E' o ponto médio do segmento $A'C'$ e E o ponto médio do segmento AC. Assim,

$$A_S = \frac{\overline{A'C'}\ \overline{B'E'}}{2} \qquad \text{e} \qquad A_B = \frac{\overline{AC}\ \overline{BE}}{2},$$

daí temos,

$$\frac{A_S}{A_B} = \frac{\overline{A'C'}\overline{B'E'}}{2} \cdot \frac{2}{\overline{AC}\ \overline{BE}},$$

ou seja,

$$\frac{A_S}{A_B} = \frac{\overline{A'C'}\,\overline{B'E'}}{\overline{AC}\,\overline{BE}}\,. \tag{3.5}$$

Sendo os triângulos $VE'B'$ e VEB semelhantes, encontramos:

$$\frac{\overline{VB'}}{\overline{VB}} = \frac{\overline{E'B'}}{\overline{EB}},$$

E, usando (3.4), segue que

$$\frac{\overline{E'B'}}{\overline{EB}} = \frac{h}{H}\,. \tag{3.6}$$

e por (3.3), temos

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{h}{H}. \tag{3.7}$$

Substituindo as duas últimas igualdades (3.6) e (3.7) em (3.5), encontramos:

$$\frac{A_S}{A_B} = \frac{hh}{HH} \text{ ou seja, } \frac{A_S}{A_B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2.$$

3.2.7 VOLUME DE UMA PIRÂMIDE TRIANGULAR

Consideremos duas pirâmides P (com área da base A_B) e P' (com área da base $A_{B'}$) de mesma altura h, apoiadas num mesmo plano α e contidas num mesmo semiespaço de origem α, de modo que qualquer plano paralelo a α estabeleça em P seção de área A_S e determine em P' uma secção de $A_{S'}$.

Observação: Se $A_B = A_{B'}$ então $A_S = A_{S'}$.

De fato, pelo que vimos na secção anterior

$$\frac{A_S}{A_B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \text{ e } \frac{A_S}{A_{B'}} = \left(\frac{h}{H}\right)^2.$$

Daí, $\frac{A_S}{A_B} = \frac{A_S}{A_{B'}}$ e, como $A_B = A_{B'}$, segue que $A_S = A_{S'}$.

Logo, pelo Princípio de Cavallière os volumes de P e P' são iguais.

Portanto, duas pirâmides triangulares de mesma altura e bases equivalentes têm volumes iguais.

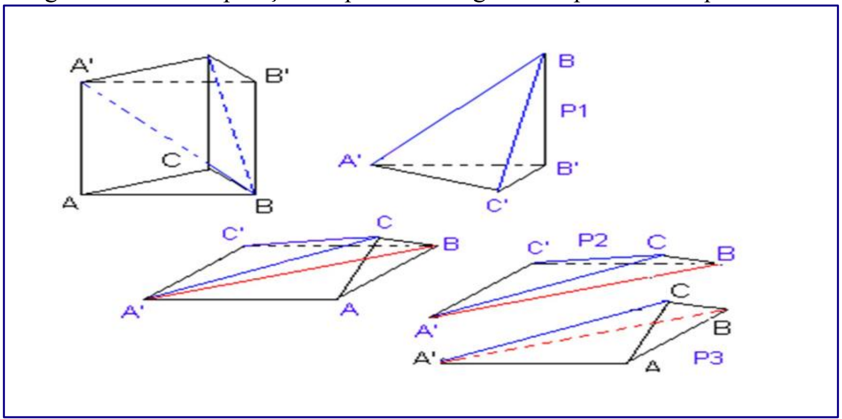
Consideremos um prisma triangular S cujas bases são os triângulos ABC e $A'B'C'$.

- Seccionando-se pelo plano definido por (B, A', C'), resultam-se duas pirâmides, P_1 de vértices A', B', C' e B, e P'_1 de vértices A, A', C', C e B.
- Seccionando-se P'_1 pelo plano definido por (A', B, C) resultam-se as pirâmides:

P_2 de vértices A', B, C e C' e P_3 de vértices A', A, B e C

Logo, o prisma S foi decomposto em três pirâmides triangulares P_1, P_2 e P_3.

Figura 3.9: Decomposição do prisma triangular em pirâmides equivalentes



Fonte: Arquivo dos autores

Observações:

1. P_1 é equivalente a P_3, pois têm bases equivalentes e mesma altura. Logo, pelo Princípio de Cavallière $V_{P1} = V_{P3}$.
2. P_2 é equivalente a P_3, pois têm bases equivalentes ($A'BC'$ e $A'BC$) e mesma altura (distância do ponto C ao plano definido por (B, A', C') que é igual a distância do ponto A ao plano definido por (B, C, A')). Usando o mesmo princípio, obtemos: $V_{P_2} = V_{P_3}$. Concluímos, então, que

$$V_{P_1} = V_{P_2} = V_{P_3} = V. \tag{3.8}$$

Como

$$V_{P_1} + V_{P_2} + V_{P_3} = V_S \tag{3.9}$$

substituindo (3.8) em (3.9) obtemos $V + V + V = V_S$, ou seja, $3V = V_S$, ou ainda,

$$V = \frac{V_S}{3}.$$

Como $V_S = A_B \cdot h$, concluímos que

$$V = \frac{A_B \cdot h}{3}.$$

Considerando uma pirâmide P de altura h e base com n lados. Basta notar que podemos dividir a base em $(n-2)$ triângulos. Logo, podemos dividir P em $(n-2)$ pirâmides triangulares de mesma altura h, em que a área da base A_B é dada por:

$$A_B = A_{b_1} + A_{b_2} + \cdots + A_{b_{n-2}}$$

$$V_P = V_{P_1} + V_{P_2} + \cdots + V_{Pn-2}$$

$$V_P = \frac{1}{3} A_{b_1} h + \frac{1}{3} A_{b_2} h + \cdots + \frac{1}{3} A_{b_{n-2}} h$$

$$V_P = \frac{1}{3} h [A_{b_1} + A_{b_2} + \cdots + A_{b_{n-2}}] = \frac{1}{3} A_B h.$$

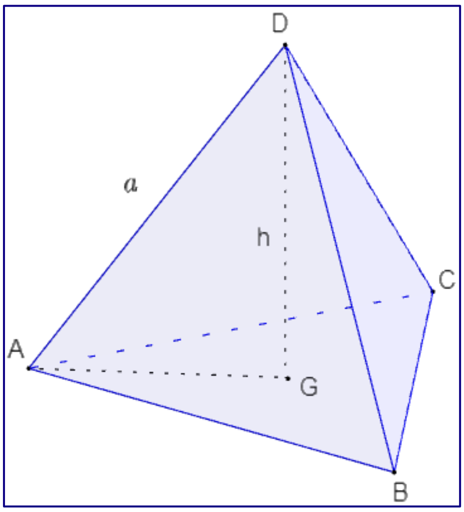
Portanto, o volume de qualquer pirâmide é dado por:

$$V_P = \frac{1}{3} A_B h.$$

3.2.8 TETRAEDRO REGULAR

Definição 3.7: Tetraedro é uma pirâmide triangular. Dizemos que um tetraedro é regular quando todas as suas arestas são congruentes.

Figura 3.10: Tetraedro



Fonte: Arquivo dos autores

Teorema 3.4: Em um tetraedro regular cujas arestas medem a e cuja base é o triângulo ABC, temos as seguintes relações para a área da sua superfície total, A_T, e para o volume, V.

- Area: $A_T = 2a^2 \cdot sen\ 60° = a^2\sqrt{3}$.
- Volume: $V = \frac{1}{3}A_B h$.

Prova: Considere um tetraedro regular cujas arestas medem a e cuja base é o triângulo de vértices ABC. Seja G o encontro das alturas do triângulo ABC. Então $\overline{AG} = \frac{2}{3}H$, em que H denota a altura do triângulo ABC (base do tetraedro). Mas, a altura de um triângulo equilátero de lados medindo a é dada por $H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Então, a área do triângulo ABC é dada por

$$A_{ABC} = a\frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Portanto, a área total do tetraedro é:

$$A_T = 4\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3} = 2\,a^2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\,a^2 sen\ 60°,$$

o que prova a primeira parte do teorema.

Como a base é um triângulo equilátero, $AG = \frac{2}{3}H$, em que H é a altura do triângulo da base. Então

$$\overline{AG} = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Agora, usando o Teorema de Pitágoras, temos que $a^2 = (AG)^2 + h^2$, onde h denota a altura da pirâmide, ou seja, $h^2 = a^2 - (AG)^2 = a^2 - \frac{3}{9}a^2 = \frac{6}{9}a^2$.

Assim,

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Portanto, o volume do tetraedro é dado por:

$$V=\frac{a^2}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a^3 3\sqrt{2}}{36}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

3.2.9 PIRÂMIDES SEMELHANTES

Definição 3.8: Dizemos que duas pirâmides são semelhantes quando existe entre elas uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que a razão de semelhança entre uma aresta de uma delas e a correspondente na outra seja constante. Indicaremos essa razão de semelhança por k.

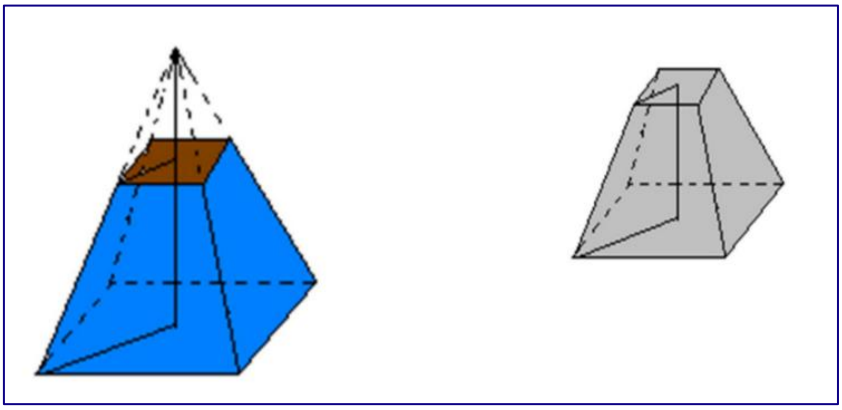
Se duas pirâmides são semelhantes:

1. A razão de semelhança entre as medidas dos elementos lineares homólogos é igual a k.
2. A razão entre as áreas de superfícies correspondentes é igual a k^2.
3. A razão entre os volumes dos dois sólidos é igual a k^3.

3.2.10 TRONCO DE PIRÂMIDE

Sejam uma pirâmide P de vértice V e altura h_1 e α o plano que contém sua base. Seccionando-se esta pirâmide por um plano β paralelo a α que está a uma distância h $(0 < h < h_1)$ do vértice V, encontraremos:

Figura 3.11: Tronco de pirâmide



Fonte: Arquivo dos autores

1. Uma pirâmide semelhante P_1 de vértice V e altura h, com faces semelhantes às faces correspondentes da pirâmide P, ou seja, P e P_1 são semelhantes.
2. Um novo sólido, chamado **tronco de pirâmide** cujas faces laterais são trapézios e cuja altura é $H = h_1 - h$.

3.2.10.1 Elementos de um tronco de pirâmide

- **Base maior:** é o polígono que gera a base da pirâmide P;
- **Base menor:** é o polígono obtido pela secção que produz o tronco;
- **Faces laterais:** são trapézios cujas bases maiores são os lados da base maior do tronco e as bases menores são os lados correspondentes na base menor do tronco.
- **Arestas laterais:** são os segmentos de reta que têm uma extremidade num vértice da base maior do tronco e a outra no vértice correspondente da base menor do tronco;
- **Arestas da base maior:** são os lados do polígono da base maior do tronco;
- **Arestas da base menor:** são os lados do polígono da base menor do tronco;
- **Vértices:** são os vértices dos polígonos das bases do tronco;
- **Altura:** é distância entre os planos que contém as duas bases do tronco.

Definição 3.9: Dizemos que o tronco de pirâmide é regular quando suas bases são polígonos regulares. Neste caso, suas faces laterais são trapézios isósceles.

3.2.10.2 Áreas das superfícies de um tronco de pirâmide

Planificando o tronco temos:

- **Área da base maior:** é a área do polígono que gera a base da pirâmide P.
- **Área da base menor:** é a área do polígono formado pela secção.
- **Área lateral:** é a soma das áreas das faces laterais.
- **Área total:** é a soma das áreas das bases com a área lateral.

3.2.10.3 Volume do tronco de pirâmide

Consideremos A_B e A_b as áreas das bases de um tronco de pirâmide de bases paralelas e altura H. Seja h_1 a altura da pirâmide original e h a altura da pirâmide retirada. O volume do tronco será dado por:

$$V = V_1 - V_2 \tag{3.10}$$

em que V_1 e V_2 são os volumes das pirâmides de alturas, respectivamente, h_1 e h (ver Figura 3.8).

A razão de semelhança entre os elementos lineares homólogos das pirâmides de bases B e b é igual a h/h_1. Então, temos que

$$\frac{A_B}{A_b} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^2, \quad \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^3 \text{ ou seja}$$

$$V_1 = V_2\left(\frac{h_1}{h}\right)^3. \tag{3.11}$$

Substituindo (3.11) em (3.10) temos:

$$\begin{aligned} V &= V_2\left(\frac{h_1}{h}\right)^3 - V_2 \\ &= V_2\left[\left(\frac{h_1}{h}\right)^3 - 1\right] \\ &= V_2\frac{\left({h_1}^3 - h^3\right)}{h^3} \\ &= V_2\frac{\left[(h_1 - h)\left(h^2 + hh_1 + {h_1}^2\right)\right]}{h^3}. \end{aligned}$$

Como $h_1 - h = H$ e $V_2 = \frac{1}{3}A_b \cdot h$, temos

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}A_b hH\frac{\left(h^2 + hh_1 + {h_1}^2\right)}{h^3} \\ &= \frac{1}{3}A_b H[1 + (h_1/h) + ({h_1}^2/h^2)] \end{aligned}$$

Como $\frac{{h_1}^2}{h^2} = \frac{A_B}{A_b}$ e $\frac{h_1}{h} = \sqrt{\frac{A_B}{A_b}}$, obtemos:

$$V = \frac{1}{3}A_b H\left[\frac{A_b}{A_b} + \sqrt{\frac{A_B}{A_b}} + \frac{A_B}{A_b}\right] = \frac{1}{3}H\left[A_b + A_b\sqrt{\frac{A_B}{A_b}} + A_B\right].$$

Mas, $A_b\sqrt{\frac{A_B}{A_b}} = \sqrt{\mathrm{A_B A_b}}$. Logo,

$$V = \frac{1}{3}H\left[A_b + \sqrt{A_B A_b} + A_B\right].$$

3.2.11 EXERCÍCIOS

1. Uma pirâmide regular de altura igual a $9cm$ e cuja base é um quadrado de lado medindo $5cm$ é seccionada por um plano paralelo à base. Calcule a distância da seção ao vértice de modo que o prisma inscrito, tendo por bases a seção e sua projeção ortogonal sobre a base da pirâmide, tenha $40cm^2$ de área lateral.

2. Calcule a distância do centro de uma face de um tetraedro regular ao centro de uma outra face, em função da aresta.

3. Calcule o volume de uma pirâmide regular quadrática cuja diagonal da base mede $4m$ e cuja aresta lateral mede $2{,}5m$.

4. O perímetro da base de uma pirâmide hexagonal regular é $12m$ e sua altura $10m$. Calcule o volume desta pirâmide.

5. O volume de uma pirâmide regular hexagonal é $336dm^3$. Sabendo-se que o perímetro da base é de $42dm$, calcule sua altura.

6. Calcule o volume de um octaedro regular de aresta a.

7. Calcule a aresta de um tetraedro regular que é equivalente a um cubo cuja área total é s.

8. Demonstre que, se o apótema de um tronco de pirâmide regular de bases quadrangulares é a média aritmética das arestas das bases, a altura é a média geométrica dessas arestas.

9. Considere os pontos médios de três faces de um cubo de aresta $4cm$. Calcule o perímetro e a área da região triangular cujos vértices são estes pontos. Observe os vários casos existentes.

10. Com relação ao cubo do exercício (9) calcule:

a) a área da face;

b) a diagonal do cubo;

c) a área total do cubo.

11. Um prisma hexagonal regular tem altura medindo $\sqrt{3}$ e raio do círculo que circunscreve a base medindo 2, calcule a área total desse prisma.

12. A soma das dimensões a, b e c de um paralelepípedo retângulo é m e a medida da diagonal é d. Calcule a área total desse paralelepípedo em função de m e d.

13. Calcule as dimensões de um ortoedro de área total $184m^2$, sabendo que elas são proporcionais aos números 1, 3 e 5.

14. A altura de um prisma reto de base quadrada mede $3m$ e sua área total mede $80m^2$. Calcule o lado da base. Calcule a área total de um prisma hexagonal regular cuja aresta da base mede 10 cm e cuja aresta lateral mede $20cm$.

3.2.12 SEÇÃO DESAFIO

1. Sobre as arestas AB e AC de um tetraedro regular de vértices M, A, B e C e arestas medindo a, marcam-se, respectivamente, os segmentos $NA = AR = ma, 0 < m < 1$.

a) Calcule o volume da pirâmide $MANR$.

b) Para que valor de m o plano passando por MNR divide o tetraedro em dois sólidos equivalentes?

2. Um cubo tem bases $ABCD$ e $EFGH$, e arestas AE, BF, CG e DH, medindo $3m$. Considere os pontos M, N e P da seguinte forma:

$$M \in AD \text{ e } \overline{AM} = 2m; N \in AB \text{ e } \overline{AN} = 2m; \quad P \in \overline{BF} \text{ e } \overline{BP} = 0{,}5m.$$

Calcule o perímetro da seção que o plano MNP determina no cubo.

CILINDRO E CONE

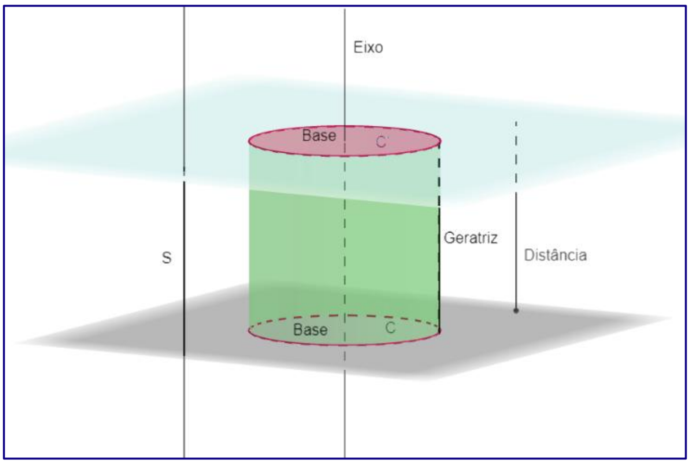
Neste capítulo introduzimos o estudo dos corpos redondos, apresentando algumas propriedades do cilindro, cone e tronco de cone.

4.1 CILINDRO

Consideremos α e β dois planos distintos e paralelos, c um círculo de centro O e raio r, contido em α e s uma reta concorrente com α.

Definição 4.1: Definimos cilindro circular como sendo a reunião de todos os segmentos de retas paralelos a s, com uma extremidade em c e outra em β.

Figura 4.1: Cilindro e suas partes



Fonte: Arquivo dos autores

Note que a interseção com β de todos os segmentos paralelos a s com uma extremidade em C dá origem a um círculo C' contido em β congruente ao círculo C.

4.1.1 PARTES DE UM CILINDRO

1. **Bases:** são as regiões circulares congruentes de raio r, situadas em planos paralelos.
2. **Altura**: é a distância entre os planos que contém as bases.
3. **Eixo**: é a reta que passa pelos centros das duas bases.
4. **Geratriz:** é todo segmento de reta paralelo à reta s com uma extremidade na circunferência de C e outra em β.

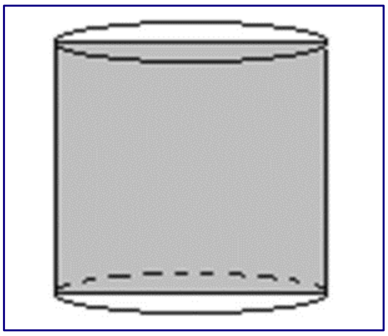
4.1.2 CLASSIFICAÇÃO DE UM CILINDRO

Dizemos que um cilindro circular é **reto** quando suas geratrizes são perpendiculares aos planos que contém as bases, caso contrário, dizemos que o cilindro circular é **oblíquo**.

Definição 4.2: A interseção do cilindro reto com o plano que contém os centros das bases é chamada **Secção Meridiana do Cilindro**.

Definição 4.3: Dizemos que um cilindro é equilátero se a sua secção meridiana é um quadrado.

Figura 4.2: Secção meridiana do cilindro



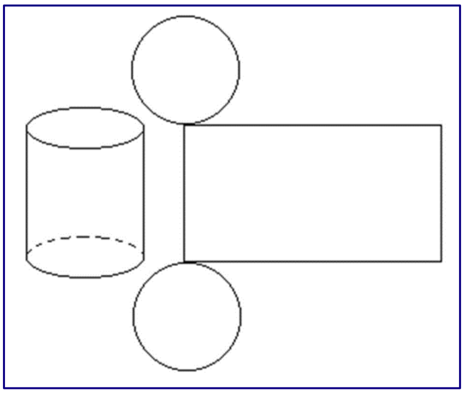
Fonte: Arquivo dos autores

Observação: Um cilindro reto de raio r e de geratriz g, é também chamado cilindro de revolução, pois pode ser considerado como um sólido gerado a partir da rotação de uma região retangular de lados r e g em torno do eixo OO', onde O é o centro de uma das bases e O' o centro da outra base.

4.1.3 SUPERFÍCIES DO CILINDRO

- **Superfície lateral:** é a reunião de todas as geratrizes do cilindro, a qual denotaremos por S_L.
- **Superfície total:** denotada por S_T, é a reunião da superfície lateral com as superfícies das bases.

Figura 4.3: Planificação do cilindro



Fonte: Arquivo dos autores

4.1.4 ÁREA DA SUPERFÍCIE DO CILINDRO

- **Área lateral:** denotada por A_L, é a área da superfície lateral do cilindro.
- **Área da base:** denotada por A_B, é a área do círculo da base do cilindro.
- **Área total:** é a soma da área lateral com a área dos círculos das bases do cilindro.

Consideremos um cilindro circular reto de raio r e altura h.

$$A_L = 2\pi rh.$$

Cada base tem área igual a πr^2, então

$$A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2 \quad \text{ou} \quad A_T = 2\pi r\,(h + r).$$

Definição 4.4: Um cilindro circular reto é equilátero quando a altura é o dobro do raio, ou seja, $h = 2r$.

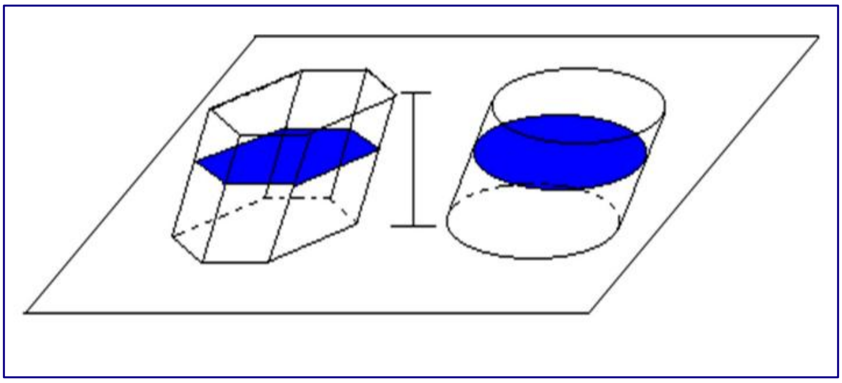
Nesse caso, temos

$$A_T = 2\pi r(2r + r) = 2\pi r 3r \qquad \text{ou} \qquad A_T = 6\pi r^2.$$

4.1.5 VOLUME DO CILINDRO

Consideremos um cilindro de área da base A_B e um prisma de base equivalente, isto é, de área da base igual a A_B, ambos com altura h, apoiados num plano e contidas num mesmo semiespaço tal que qualquer plano paralelo a β determine secções equivalentes nos dois sólidos (ver Figura 4.4).

Figura 4.4: Prisma e cilindro com secções equivalentes



Fonte: Arquivo dos autores

Então, pelo princípio de Cavallière, o volume do cilindro V_C é igual ao volume do prisma V_P. Em símbolos:

$$V_C = V_P.$$

Como $V_P = A_{B_P} \cdot h$, as bases são equivalentes, isto é, $A_{B_P} = A_{B_C} = A_B$, e os volumes são iguais. Segue que

$$V_C = A_B \cdot h.$$

Sendo a base do cilindro um círculo, a área da base e o volume desse cilindro são calculados, respectivamente, pelas fórmulas:

$$A_B = \pi r^2 \qquad \text{e} \qquad V_C = \pi r^2 h.$$

Particularmente, para um cilindro equilátero temos:

$$h = 2r \quad \text{o que implica em} \quad V_C = \pi r^2 \cdot 2r \quad \text{ou} \quad V_C = 2\pi r^3.$$

4.1.6 EXERCÍCIOS

1. Calcule o volume de um cilindro de revolução cuja área total é igual ao quádruplo de sua área lateral, sabendo-se que o perímetro de sua seção meridiana mede 28 metros.
2. Calcule a área total de um cilindro equilátero cuja geratriz mede 2 metros.
3. A geratriz de um cilindro de revolução mede *4m*. Calcule o raio da base, sabendo que aumentando-se este raio de *9m*, a área lateral do novo cilindro fica igual a área total do primeiro cilindro.
4. Demonstre que a área total de um cilindro equilátero é igual a $\frac{3}{4}$ da área lateral do cilindro equilátero cuja medida da geratriz é igual a medida da diagonal da secção meridiana do primeiro cilindro.
5. Um cilindro de revolução de *10cm* de raio da base foi cortado por um plano paralelo ao eixo e distando *6cm* dele. Sabendo que a área da seção feita por este plano é $80cm^2$, calcule a geratriz do cilindro.
6. Sendo V o volume de um cilindro equilátero. Calcule sua área lateral e sua área total em função de V.
7. Calcule a área total de um cilindro de revolução cuja geratriz mede *2m*, sabendo que a área de sua base é igual a área de sua seção meridiana.

4.2 CONE

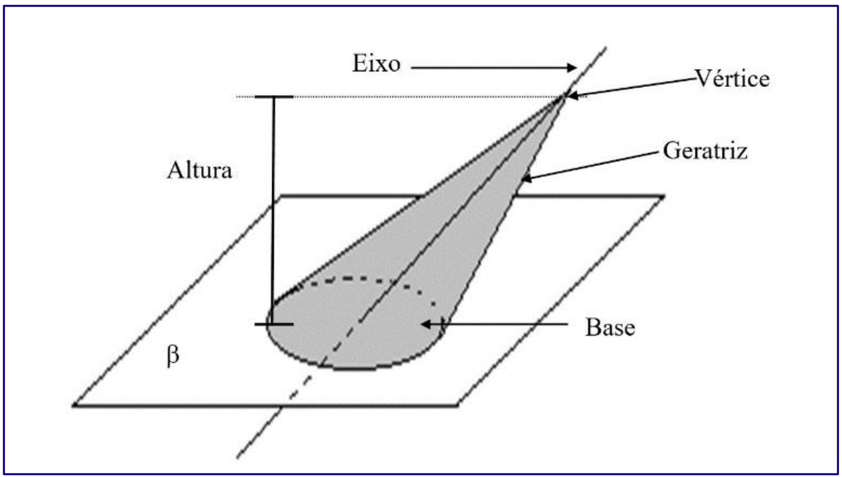
Consideremos um círculo C de centro O e raio r, contido num plano β e um ponto V for a de β.

Definição 4.5: Definimos cone circular de centro O e raio r como sendo o conjunto de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em V e outra em C.

4.2.1 PARTES DO CONE

1. **Base:** é o círculo C de raio r e centro O contido em β.
2. **Vértice:** é o ponto fixo V, fora de β.
3. **Eixo do cone:** é a reta que passa pelo vértice e pelo centro da base.
4. **Geratriz:** é todo segmento de reta com uma extremidade no vértice e outra na circunferência de C.
5. **Altura:** é a distância entre o vértice e o plano que contém a base.

Figura 4.5: Cone circular e suas partes



Fonte: Arquivo dos autores

4.2.2 CLASSIFICAÇÃO DE UM CONE

Definição 4.6: Dizemos que um cone circular é **reto** quando a projeção ortogonal do vértice coincide com o centro da base, caso contrário dizemos que o cone é **oblíquo**.

Definição 4.7: Secção meridiana de um cone é a interseção do cone com o plano que contém o seu eixo.

Definição 4.8: Dizemos que um cone é equilátero quando sua secção meridiana é um triângulo equilátero.

Observações:

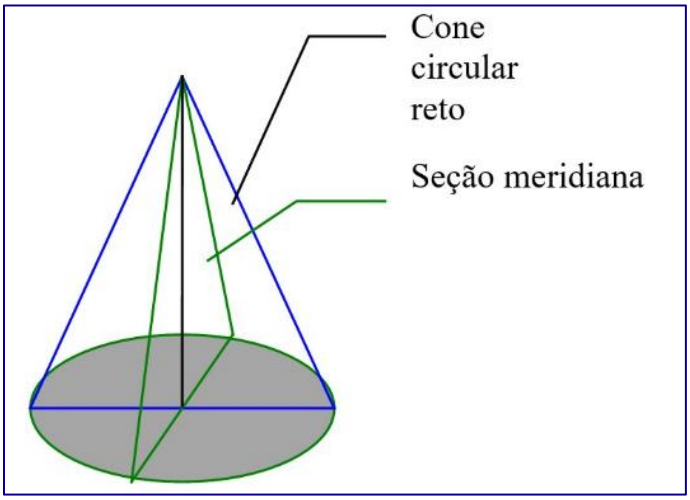
1. Num cone circular reto, o eixo é perpendicular à base e as geratrizes são todas congruentes.
2. Num cone equilátero, as geratrizes têm a mesma medida do diâmetro da base.
3. No cone circular reto, a secção meridiana é um triângulo isósceles, no qual a base é o diâmetro da base do cone e a altura é a altura do cone.

Daí, podemos estabelecer a seguinte relação num cone circular reto:

$$g^2 = h^2 + r^2,$$

em que g é a medida da geratriz do cone, h a medida da altura e r a medida do raio da base.

Figura 4.6: Secção meridiana do cone



Fonte: Arquivo dos autores

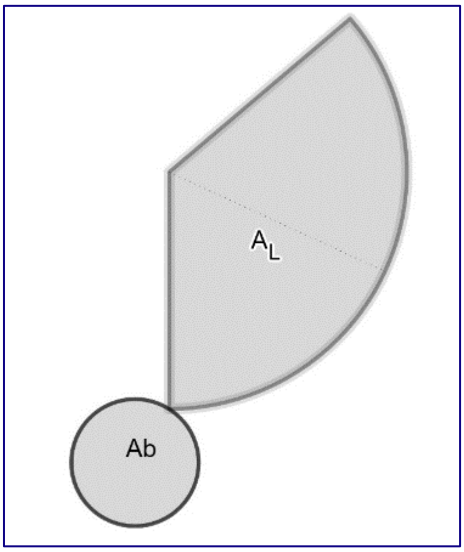
4.2.3 SUPERFÍCIE DO CONE

- **Superfície lateral:** é a reunião de todas as suas geratrizes, a qual denotaremos por S_L.
- **Superfície total:** é a reunião da sua superfície lateral com a sua base, a qual denotaremos por S_T.

4.2.4 ÁREAS DA SUPERFÍCIE DO CONE

Considere um cone circular reto de raio r e altura h. Planificando este cone, obtemos a Figura 4.7.

Figura 4.7: Planificação do cone



Fonte: Arquivo dos autores

Já que a área da superfície lateral do cone é a área de um setor circular, obtemos

$$A_L = \frac{I \cdot R}{2},$$

Como, $R = g$ e $I = 2\pi r$, segue que $A_L = (2rg/2)\pi$, ou seja,

$$A_L = \pi r g.$$

Como a área total do cone é a soma das áreas da superfície lateral e da base

$$A_T = A_L + A_B.$$

Logo

$$A_T = \pi r g + \pi r^2,$$

ou seja,

$$A_T = \pi r(g + r).$$

4.2.5 VOLUME DO CONE

Considere um cone reto cuja base, de raio R, está contida num plano α e cuja altura é h. Seja α' um plano paralelo ao plano α, cuja distância do vértice é k e cuja secção é um disco de raio r e centro O'.

Considere, agora, os triângulos $VO'C$ e VOA, como na Figura 4.8. Note que estes triângulos são semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{VA}}{\overline{VC}} = \frac{\overline{VO}}{\overline{VO'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{O'C}},$$

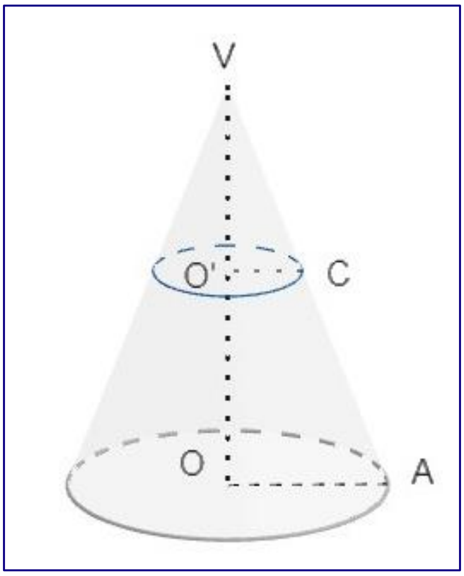
ou seja,

$$\frac{\overline{VA}}{\overline{VC}} = \frac{h}{k} = \frac{R}{r}.$$

Nas condições enunciadas, da semelhança dos triângulos

$$\frac{R}{r} = \frac{h}{k}.$$

Figura 4.8: Secção do cone por um plano paralelo a base



Fonte: Arquivo dos autores

Sendo A_B a área da base do cone e $A_{B'}$ a área da secção em α',

$$A_B = \pi\, R^2 \text{ e } A_{B'} = \pi r^2$$

Assim

$$\frac{A_B}{A_{B'}} = \frac{R^2}{r^2}.$$

Como,

$$\frac{R}{r} = \frac{h}{k}.$$

temos que

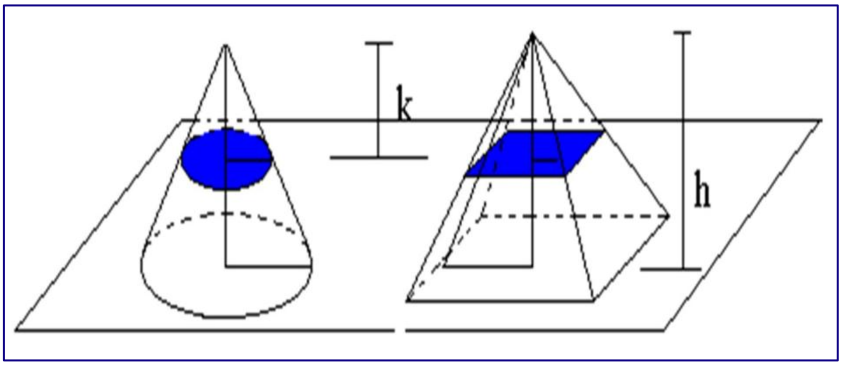
$$\frac{A_B}{A_{B'}} = \frac{h^2}{k^2}.$$

Teorema 4.1: O volume do cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Prova: Para provar este teorema, considere um cone de área da base A_B e altura h e uma pirâmide cuja base é equivalente à base do cone e cuja altura é, também, h.

Seja α o plano onde se apoiam os dois sólidos e seja α' um plano paralelo a α, cuja secção na pirâmide tem área $A_{B'}$ e no cone tem área $A_{B''}$. Denote por k a distância de α' ao vértice do cone ou da pirâmide, conforme Figura 4.9.

Figura 4.9: Cone e pirâmide com secções equivalentes



Fonte: Arquivo dos autores

Com estas considerações, temos que a razão de semelhança entre as áreas é:

$$\frac{A_B}{A_{B'}} = \frac{h^2}{k^2} = \frac{A_B}{A_{B''}}.$$

Daí, segue que $A_{B'} = A_{B''}$.

Observe que qualquer plano paralelo a α determina seções equivalentes nos dois sólidos e, então, vale o Princípio de Cavallière. Portanto os dois sólidos são equivalentes.

Concluímos que o volume do cone é igual ao volume de uma pirâmide de base equivalente a base do cone e de mesma altura, isto é:

$$V = \frac{A_B h}{3}.$$

Como $A_B = \pi r^2$, então $V_C = (\pi r^2 h)/3$.

No caso do cone equilátero, em que, $g = 2r$ e $g^2 = h^2 + r^2$ ou $h^2 = g^2 - r^2$, obtemos

$$h^2 = 4r^2 - r^2 \text{ ou } h^2 = 3r^2, \text{ ou ainda } h = r\sqrt{3}.$$

Substituindo estes valores na fórmula usada para calcular V_C, encontramos:

$$V_C = \left(\sqrt{3}\pi r^3\right)/3.$$

4.2.6 TRONCO DO CONE

Quando intersectamos um cone por um plano α paralelo ao plano da base cuja distância deste é menor que a altura do cone, determinamos dois sólidos: um deles é outro cone de mesmo vértice e o segundo é denominado tronco de cone de bases paralelas.

Definição 4.9: Tronco de cone é a região do cone compreendida entre o plano da base do cone e um plano paralelo ao plano da base, cuja distância deste é menor que a altura do cone.

Num tronco de cone destacamos: a área de sua superfície e o seu volume.

4.2.6.1 Áreas das superfícies de um tronco de cone

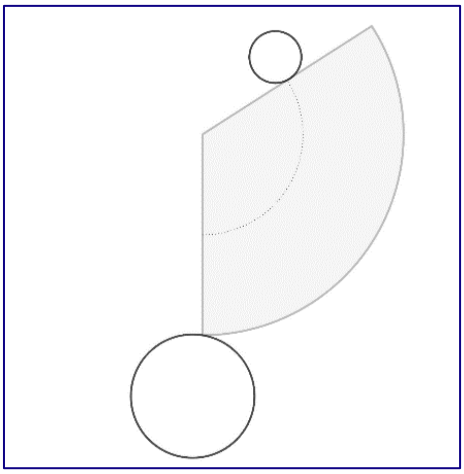
Planificando o tronco de cone circular, conforme Figura 4.10, temos:

- R é a medida do raio da base
- r é a medida do raio da secção;
- g é a medida da geratriz do cone;
- G é a medida da geratriz do tronco.

Como as bases do tronco do cone são círculos, suas áreas são dadas por:

- Área da base maior - $A_B = \pi R^2$
- Área da base menor - $A_b = \pi r^2$.

Figura 4.10: Planificação do tronco de cone



Fonte: Arquivo dos autores

A área lateral do tronco de cone é igual a área lateral do cone inicial menos a área lateral do cone obtido após a seção, conforme Figura 4.8.

Assim:

$$A_L = \pi R g - \pi r(g - G) \quad \text{ou} \quad A_L = \pi R g - \pi r g + \pi r G.$$

Ou ainda,

$$A_L = \pi g(R - r) + \pi r G \tag{4.1}$$

Como

$$VO'C \approx VOA:$$

$$\frac{\overline{O'C}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{VC}}{\overline{VA}}, \text{ ou seja, } \frac{r}{R} = \frac{g-G}{g}.$$

Daí segue-se que $Rg - RG = rg$ ou $Rg - rg = RG$, ou ainda,

$$g = \frac{RG}{R-r}. \tag{4.2}$$

Substituindo (4.2) em (4.1), temos:

$$A_L = \frac{\pi RG}{(R-r)}(R - r) + \pi r G \quad \text{ou} \quad A_L = \pi RG + \pi r G,$$

ou ainda,

$$A_L = \pi G\,(R + r).$$

A área total é a soma das áreas das bases com a área lateral. Assim,

$$A_T = A_L + A_B + A_b,$$

ou seja,

$$A_T = \pi G(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2.$$

4.2.6.2 Volume do tronco de cone circular reto de bases paralelas

O volume do tronco de cone de bases paralelas pode ser calculado pela diferença entre o volume do cone original e o volume do cone retirado, então

$$V_T = V - V_1 \tag{4.3}$$

onde V_T é o volume do tronco, V é o volume do cone original, V_1 é o volume do cone retirado.

A altura do tronco do cone, denotada por H é, então, obtida pela diferença das alturas desses cones, ou seja,

$$H = h - h_1,$$

onde h é a altura do cone original e h_1 a altura do cone retirado.
Como sabemos, que a razão de semelhança entre as áreas das bases dos cones original C e retirado C_1 é $(h/h_1)^2$, ou seja, $A_B/A_b = (h/h_1)^2$; podemos obter a razão entre os seus volumes.

De fato, sendo, $V = (A_B h)/3$ o volume do cone original e $V_1 = (A_b h_1)/3$ o volume do cone retirado, temos:

$$(V/V_1) = [(A_B h)/3]\,[3/A_b h_1] = (A_B h)/(A_b h_1).$$

Como $A_B/A_b = (h/h_1)^2$, obtemos $V/V_1 = (h/h_1)^3$. Logo

$$V = V_1(h/h_1)^3 \tag{4.4}$$

Substituindo (4.4) em (4.3), temos que o volume do tronco, V_T, é dado por:

$$V_T = V_1(h/h_1)^3 - V_1 \text{ ou } V_T = V_1[(h/h_1)^3 - 1],$$

ou ainda,

$$V_T = V_1[h^3 - (h_1)^3]/(h_1)^3.$$

Usando fatoração, encontramos

$$V_T = V_1[(h - h_1)(h^2 + hh_1 + (h_1)^2)]/(h_1)^3$$

Agora, usando que $V_1 = (A_b h_1)/3$ e $h - h_1 = H$, obtemos:

$$V_T = [A_b H\,((h^2/(h_1)^2) + (h/h_1) + 1)]\,/\,3.$$

Temos, também, $A_B/A_b = (h/h_1)^2$ e $h/h_1 = \sqrt{A_B/A_b}$. Logo,

$$V_T = A_b H[\,(A_B/A_b + \sqrt{A_B/A_b} + 1)\,]\,/\,3$$

onde obtemos

$$V_T = H\,[A_B + A_b\,.\sqrt{A_B/\,A_b} + A_b]\,/\,3,$$

ou equivalentemente,

$$V_T = [H\,(A_B + \sqrt{A_B A_b} + A_b)]\,/\,3.$$

4.2.7 EXERCÍCIOS

1. Calcule, em função do raio e da geratriz, a área da seção meridiana de um cone.
2. Calcule o volume de um cone de revolução cujo raio da base é 3 dm e cujo perímetro da seção meridiana mede $16dm$.
3. Um cone de revolução de 6m de raio da base e *10m* de geratriz é cortado por um plano paralelo à sua base, distando *2m* desta. Calcule a área total do cone menor seccionado.
4. A geratriz de um cone de revolução mede *2cm* e forma com o eixo do cone um ângulo de 60º. Calcule o volume deste cone.
5. O ângulo formado pela geratriz e o eixo de um cone de revolução mede 45º. Sendo *P* o perímetro da seção meridiana deste cone, calcule sua área total, em função de *P*.
6. Um cone de revolução de raio da base *R* e geratriz *G* é cortado por um plano α paralelo à sua base. Calcule a distância do plano α ao vértice do cone, sabendo que a área total do cone, cuja base está sobre o plano α é igual a área lateral do cone primitivo.

ESFERA

Neste capítulo, continuamos o estudo dos corpos redondos, abordando agora o conteúdo de esfera. Baseados em Carvalho, 1969, abordamos alguns conceitos sobre este sólido e fazemos deduções das fórmulas usadas para calcular a área da superfície e o volume da esfera.

5.1 ESFERA E SUPERFÍCIE ESFÉRICA

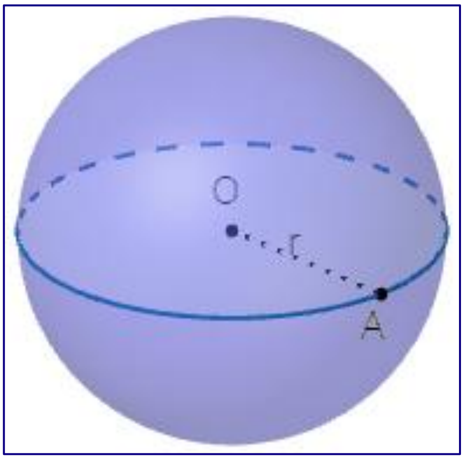
Consideremos um ponto O e um número r real positivo.

A superfície esférica de centro O e raio r é o conjunto de pontos A do espaço cujas distâncias ao ponto O são iguais a r.

Podemos desenhar uma superfície esférica de qualquer centro e qualquer raio. Também chamaremos de raio o segmento que une o centro da superfície esférica a qualquer de seus pontos.

O sólido limitado por uma superfície esférica chama-se esfera, isto é, **esfera de centro $\boldsymbol{O}$ e raio $\boldsymbol{r}$** é a parte convexa determinada pela superfície esférica. Desse modo, a esfera de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são menores ou iguais a r. O conjunto dos pontos C tais que as distâncias de O a C são maiores do que r são ditos estar fora da superfície esférica.

Figura 5.1: Representação de uma esfera



Fonte: Arquivo dos autores

Podemos dizer, em linguagem popular, que a superfície esférica é a “casca”, enquanto a esfera é a reunião da “casca” com o “miolo”.

Naturalmente, as designações centro e raio são aplicadas indiferentemente a uma superfície esférica ou a esfera por ela delimitada.

Observações:

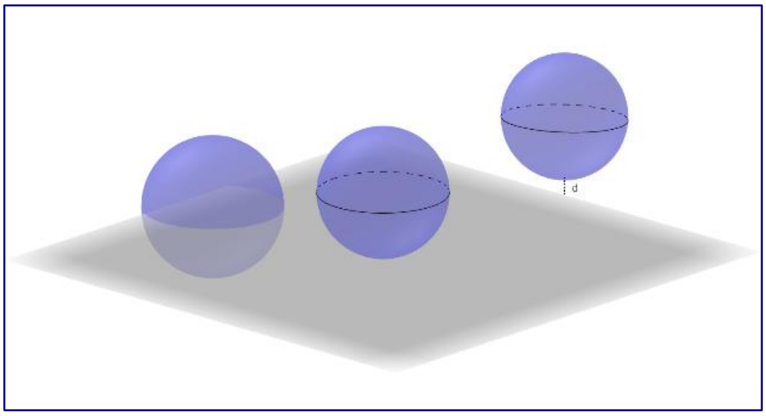
1. Optamos por esta definição de esfera que é mais usada pelos autores de livros de matemática e de física do ensino médio, mas classicamente; **esfera de centro em $\boldsymbol{O}$ e raio $\boldsymbol{r}$** é definida como o conjunto de pontos do espaço cujas distâncias são menores ou iguais a r.
2. Neste caso, o sólido limitado pela superfície esférica (miolo juntamente com a casca) também é chamado de **bola fechada** de centro O e raio r o sólido limitado pela superfície esférica (apenas o miolo, sem a casca) é chamado de **bola aberta** de centro em O e raio r.

5.2 POSIÇÕES RELATIVAS DE UM PLANO E UMA ESFERA

Um plano com relação a uma esfera, ou a uma superfície esférica, pode ser: externo, tangente ou secante.

- **Externo:** quando a distância $\boldsymbol{d}$ do centro da esfera ao plano é maior que o raio, $\boldsymbol{d} > r$ (não há ponto em comum).
- **Tangente:** quando a distância $\boldsymbol{d}$ do centro da esfera ao plano é igual ao raio, $\mathrm{d} = r$ (há apenas um ponto em comum).
- **Secante:** quando a distância $\boldsymbol{d}$ do centro da esfera ao plano é menor que o raio, $\boldsymbol{d} < r$ (há mais de um ponto comum).

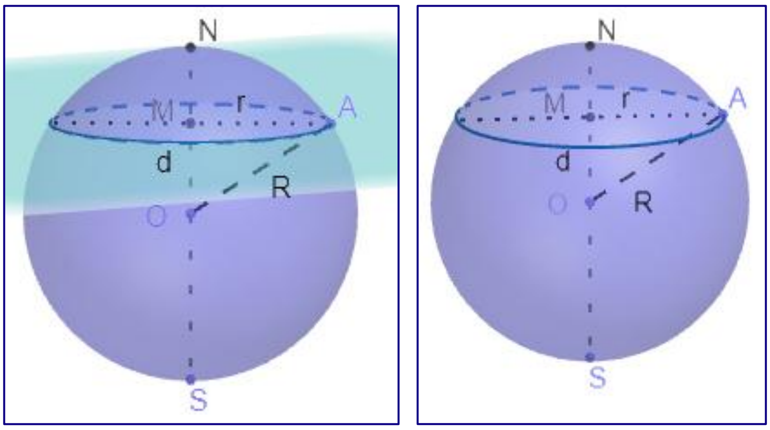
Figura 5.2: Posições relativas de uma esfera e um plano



Fonte: Arquivo dos autores

Quando o plano é secante à esfera, como na Figura 5.3, a interseção é uma região circular de centro O'.

Figura 5.3: Relação entre os raios da esfera e da secção



Fonte: Arquivo dos autores

Na figura 5.3, temos:

$\overline{OA} = R$ (raio da esfera)

$\overline{OA'} = r$ (raio do círculo obtido pela interseção).

$\overline{OO'} = d$ (distância do centro da esfera ao plano α, que secciona a esfera).

Utilizando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$R^2 = d^2 + r^2.$$

Observação: No caso da distância do centro da esfera ao plano for igual a zero, $d = 0$, ou seja, o plano π passa pelo centro da esfera, a interseção de π com a esfera é uma região circular de raio igual ao raio da esfera, chamado região circular máxima e o plano π é chamado **plano mediador**, **plano de simetria**, **plano meridiano** ou **plano diametral**.

Tais planos dividem a superfícies esférica em duas superfícies denominadas **hemisférios** e dividem a esfera em duas regiões denominadas **hemisférios sólidos**.

5.3 POSIÇÕES RELATIVAS DE UMA RETA E UMA ESFERA

Uma reta com relação a uma esfera, pode ser: externa, tangente ou secante.

- **Externa:** quando a distância da reta ao centro da esfera é maior que o raio.
- **Tangente:** quando a distância da reta ao centro da esfera é igual ao raio.
- **Secante:** quando a distância da reta ao centro da esfera é menor que o raio, isto é, quando a reta fura a superfície esférica em dois pontos.

5.4 POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS ESFERAS

Duas esferas podem ser: exteriores, tangentes exteriores, secantes, tangentes interiores ou uma interior a outra (não exteriores).

Considere as duas esferas de centros O e O', raios r e r', respectivamente e d a distância entre O e O'. Suponha que r é maior que r'.

- **Exteriores:** quando $d > r + r'$.
- **Tangentes exteriores:** quando $d = r + r'$.
- **Secantes:** quando $r - r' < d < r + r'$.
- **Tangentes interiores:** quando $d = r - r'$.
- **A menor é interior à maior** (não tangentes) quando $d < r - r'$.

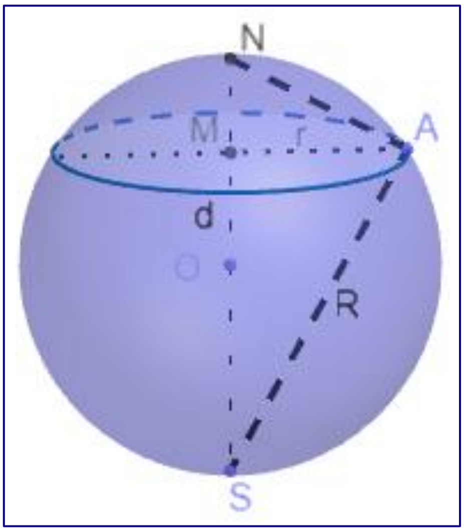
5.5 POLOS

Consideremos C um círculo de uma esfera, m a reta passando por seu centro e perpendicular ao plano que contém esse círculo.

Chamamos **Polos** os pontos N e S de interseção de m com a superfície esférica. Dessa forma, o segmento NS é um diâmetro da esfera e cada polo é equidistante de todos os pontos da circunferência desse círculo C.

Denominamos **distância polar** de círculo da esfera, a distância constante de um polo a qualquer ponto da circunferência desse círculo.

Figura 5.4: Distância polar



Fonte: Arquivo dos autores

Usando a semelhança dos triângulos retângulos NAS e NMA, conforme Figura 5.4, temos:

$$\overline{AN}^2 = \overline{NS}\,.\,\overline{NM} \quad \text{ou} \quad \overline{AN}^2 = 2r\,.\,(r-d).$$

Daí,

$$\overline{AN} = \sqrt{2r(r-d)}.$$

Analogamente, usando a semelhança dos triângulos retângulos NAS e AMS, obtemos:

$$(\overline{AS})^2 = \overline{NS}\,.\,\overline{SM} \quad \text{ou} \quad (\overline{AS})^2 = 2r\,(r+d).$$

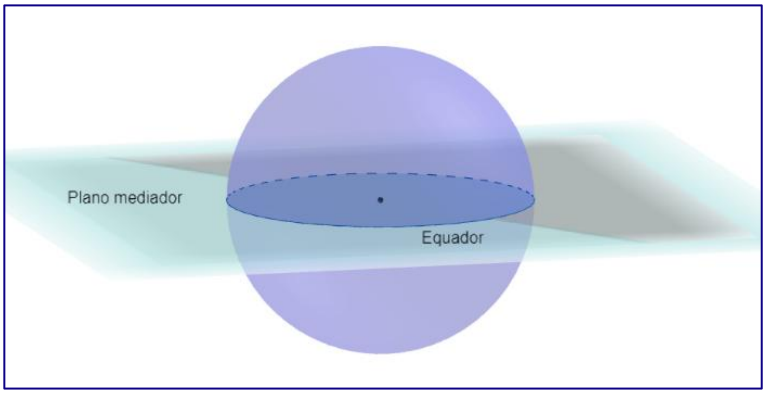
Portanto,

$$\overline{AS} = \sqrt{2r(r+d)}.$$

5.6 APLICAÇÃO À GEOGRAFIA

Considerando a terra como uma esfera, temos um plano mediador que divide a superfície esférica em duas superfícies: *o* **hemisfério norte** e o **hemisfério sul**. A circunferência determinada por este plano é chamada **Equador**.

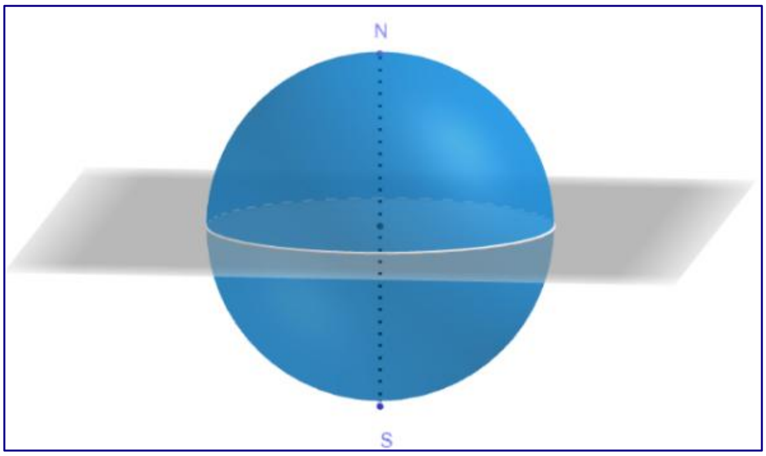
Figura 5.5: Plano mediador



Fonte: Arquivo dos autores

A reta que passa pelo centro da Terra e é perpendicular ao plano do Equador intersecta a superfície terrestre nos polos Norte e Sul.

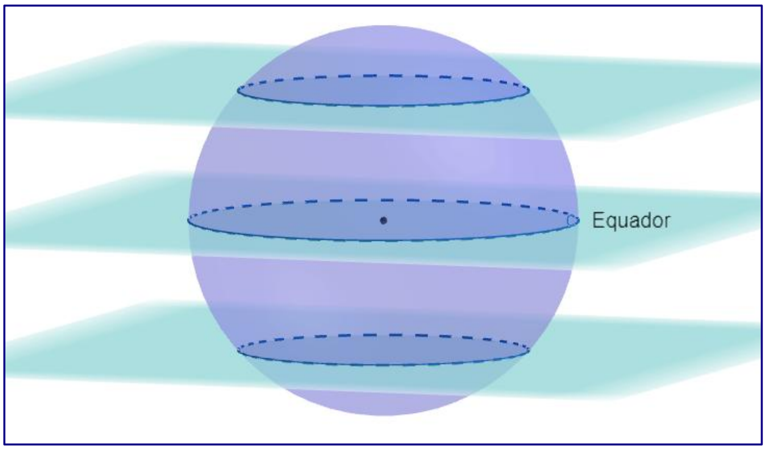
Figura 5.6: Polos



Fonte: Arquivo dos autores

As seções de superfície terrestre paralelas ao plano do Equador são **denominadas paralelos**.

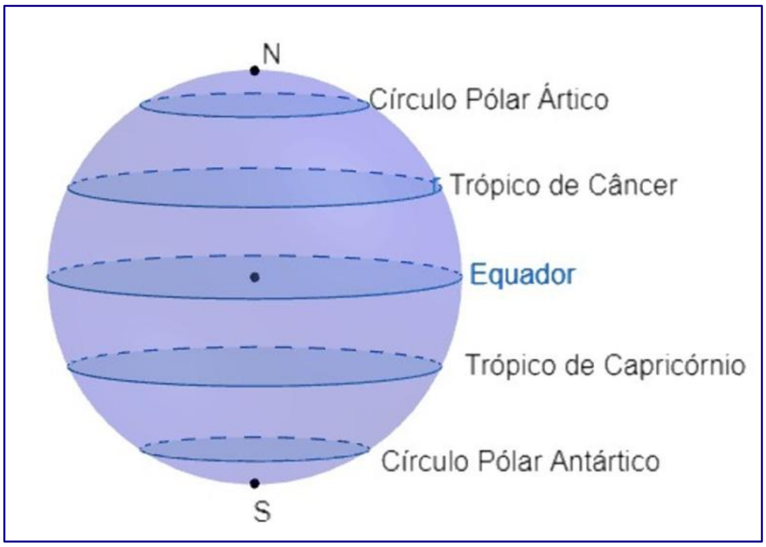
Figura 5.7: Secções da esfera que formam paralelos



Fonte: Arquivo dos autores.

Observação: Os paralelos são linhas horizontais que circundam a terra (contidas em planos paralelos ao plano que contém a linha do equador). O paralelo mais importante é o equador, mas também são paralelos bem conhecidos os trópicos de câncer e de capricórnio (que marcam as zonas tropicais) e os círculos polares ártico e antártico.

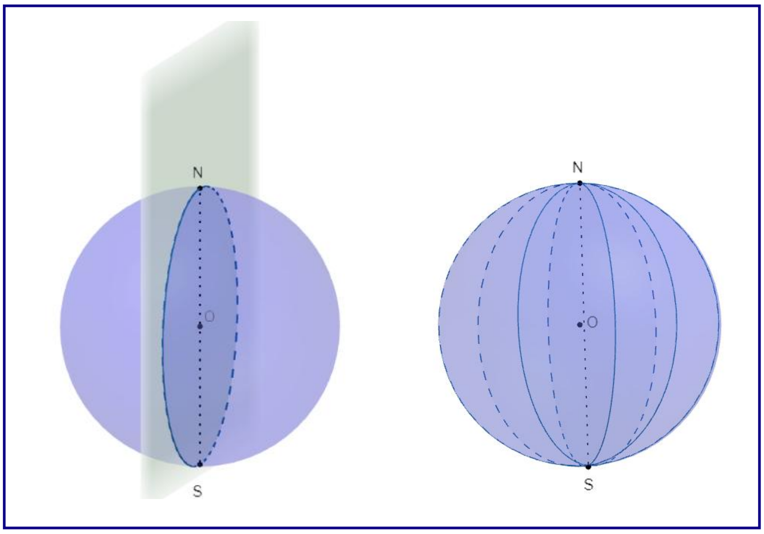
Figura 5.8: Trópicos e círculos polares



Fonte: Arquivo dos autores.

As seções de superfície terrestre que contém os polos são **denominadas meridianos**.

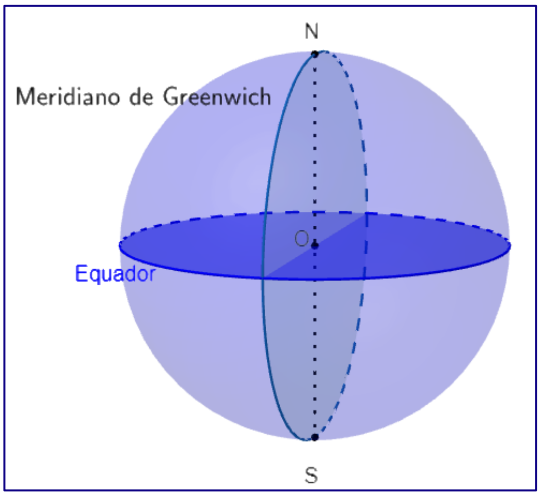
Figura 5.9: secções da esfera que determinam os meridianos



Fonte: Arquivo dos autores.

Observação: Os meridianos são linhas verticais que se estendem de um polo a outro (norte a sul). O meridiano principal é **o meridiano de Greenwich**, o qual é utilizado como referência para definir os fusos horários e a longitude de um lugar. O meridiano de Greenwich divide a terra em dois **hemisférios: o leste e o oeste**.

Figura 5.10: Equador e meridiano de greenwich



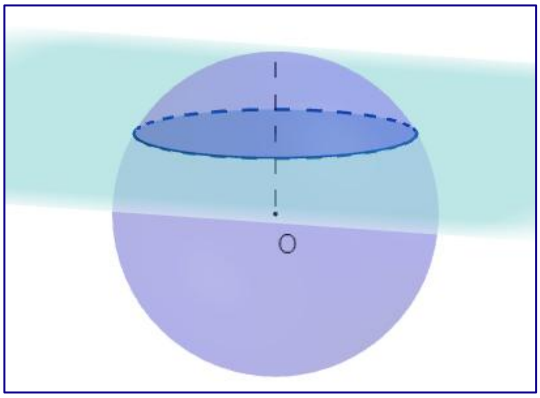
Fonte: Arquivo dos autores.

A rede de paralelos e meridianos forma o que chamamos de **coordenadas geográficas**, as quais são utilizadas para **geolocalização.** Ao cruzar um paralelo com um meridiano, obtemos a **latitude** (distância com relação ao equador) e a **longitude** (distância com relação ao meridiano de Greenwich) e, assim, podemos identificar a posição de qualquer ponto na superfície da terra.

5.7 PRINCIPAIS SEÇÕES DA ESFERA E DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Um plano secante a uma superfície esférica a divide em duas partes, que se denominam **calotas esféricas** e divide a esfera em duas partes denominadas **segmentos esféricos de uma base**, isto é, o segmento esférico de uma base é um sólido, cuja base é um círculo e cuja superfície lateral é uma calota esférica.

Figura 5.11: Calota esférica

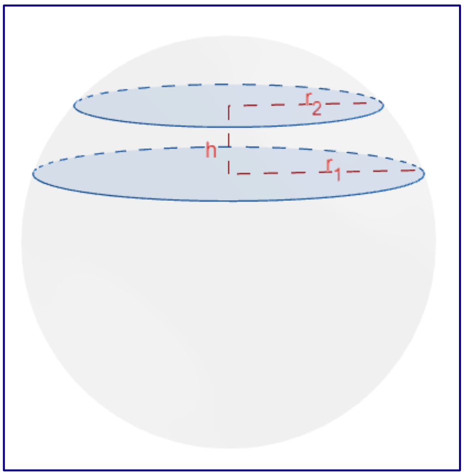


Fonte: Arquivo dos autores.

A distância da base de uma calota esférica (ou de um segmento esférico de uma base) ao plano tangente que lhe é paralelo denomina-se **altura da calota** (ou do **segmento esférico**).

Considere π e α dois planos paralelos secantes a uma esfera. A porção de superfície esférica compreendida entre estes planos é denominada **zona esférica** e a porção da esfera compreendida entre estes planos denomina-se **segmento esférico de duas bases**. Assim sendo, o segmento esférico de duas bases é o sólido cujas bases são círculos e cuja superfície lateral é uma **zona esférica**.

Figura 5.12: Zona esférica

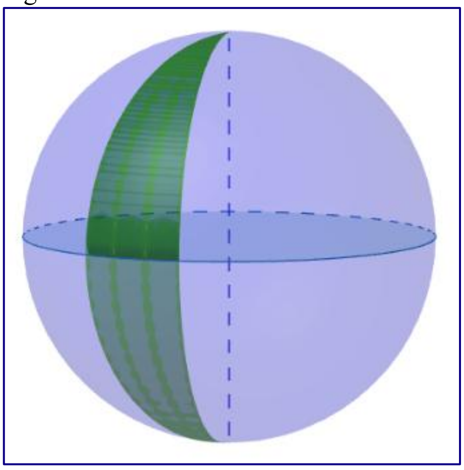


Fonte: Arquivo dos autores.

A distância entre os dois planos é chamada **altura da zona esférica** ou do **segmento esférico**.

Considere dois semiplanos cuja origem comum é um diâmetro qualquer de uma esfera, a porção da superfície esférica compreendida entre os semiplanos denomina-se **fuso esférico** e a porção da esfera compreendida entre estes semiplanos denomina-se **cunha esférica**. Dessa maneira a cunha esférica é o sólido limitado por um fuso esférico e por dois semicírculos de diâmetro comum.

Figura 5.13: Fuso esférico e cunha esférica

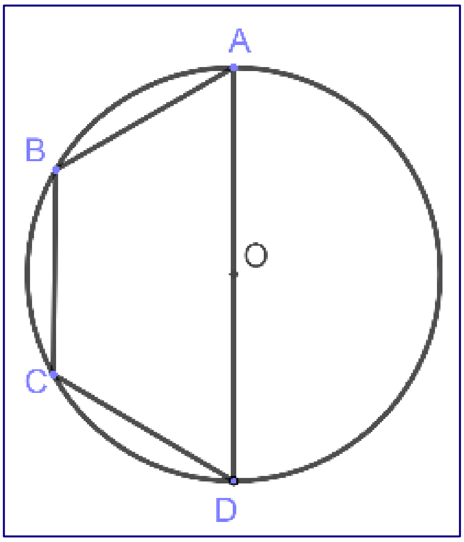


Fonte: arquivo dos autores.

5.8 ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFERICA

Seja $ABCD$ uma linha poligonal regular inscrita em um semicírculo de diâmetro AD.

Figura 5.14: Poligonal regular inscrita numa semicircunferência



Fonte: Arquivo dos autores.

Seja S a área da superfície gerada pela poligonal $ABCD$, quando o semiplano de origem AD, que contém esta poligonal, dá uma rotação de 360^o em torno de AD.

Definição: Definimos a **área da superfície esférica** gerada pela semicircunferência como o limite para que tende a área S, quando o número de lados da poligonal $ABCD$, inscrita no semicírculo, aumenta indefinidamente.

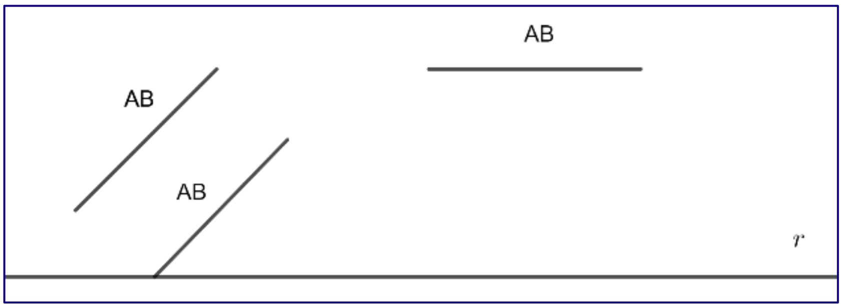
Analogamente se definem as áreas das principais secções da superfície esférica. Assim, os limites para que tendem as áreas das superfícies geradas pelas poligonais inscritas AB e BC, num movimento de rotação de 360^o em torno de AD, quando o número de lados destas poligonais aumenta indefinidamente, são, respectivamente, as **áreas** da **calota esférica,** e da **zona esférica** geradas pelos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{BC}$, respectivamente.

O limite para que tende a área da superfície gerada pela poligonal $ABCD$, num movimento de rotação de um certo ângulo, em torno de AD, quando o seu número de lados aumenta indefinidamente, é a área do **fuso esférico** gerado pela semicircunferência (que circunscreve a poligonal) no mesmo movimento de rotação.

5.8.1 ÁREA DA SUPERFÍCIE GERADA PELA ROTAÇÃO DE UM SEGMENTO DE RETA

Consideremos um segmento de reta AB e uma reta r, situados num mesmo plano e suponha que a reta não atravesse, não lhe seja perpendicular e não contenha este segmento. Então o segmento AB pode estar em relação à reta r numa das três possibilidades indicadas na Figura 5.15. Dando ao semiplano de origem r, que contém AB, uma rotação de 360º em torno de r, o segmento AB irá gerar a superfície de um tronco de cone, de um cone ou de um cilindro (de revolução), conforme esteja, com relação a r, na primeira, segunda ou terceira posição da figura.

Figura 5.15: Segmentos de um semiplano com relação a origem desse semiplano



Fonte: Arquivo dos autores.

Vamos estabelecer uma expressão geral para área da superfície gerada em cada um dos três casos:

1º Caso: o segmento não é paralelo à reta r e não tem ponto comum com ela.

Seja P o ponto médio do segmento AB. Tracemos pelos pontos A e B, respectivamente, as perpendiculares AM e BN à reta r e no ponto P tracemos as perpendiculares PR e PS, respectivamente, à reta r e ao segmento AB. Pelo ponto A tracemos o segmento AQ paralela à reta r, conforme Figura 5.16.

Sendo a área lateral do tronco de cone dada por

$$S = \pi g(r_1 + r_2) = \pi\overline{AB}(\overline{AM} + \overline{BN}).$$

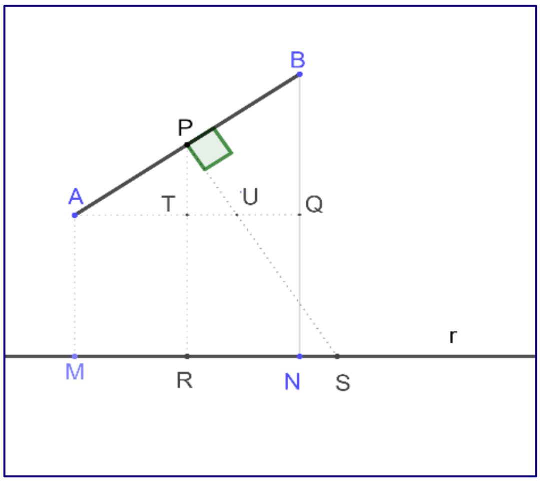
Como

$$\overline{PR} = \frac{\overline{AM} + \overline{BN}}{2},$$

Segue que

$$S = 2\pi\overline{PR}\,\overline{AB}.$$

Figura 5.16: Segmento oblíquo a reta e sem ponto em comum



Fonte: Arquivo dos autores.

Agora, notemos que os triângulos BAQ e SPR são semelhantes, pois

$$\text{BAQ} \approx \text{PAT} \approx \text{PUT} \approx \text{SPR}.$$

Assim, temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \overline{PR}\,\overline{AB} = \overline{PS}\,\overline{AQ}$$

Observando que $\overline{AQ} = \overline{MN}$, segue que

$$\overline{PR}\,\overline{AB} = \overline{PS}\,\overline{MN}.$$

Portanto,

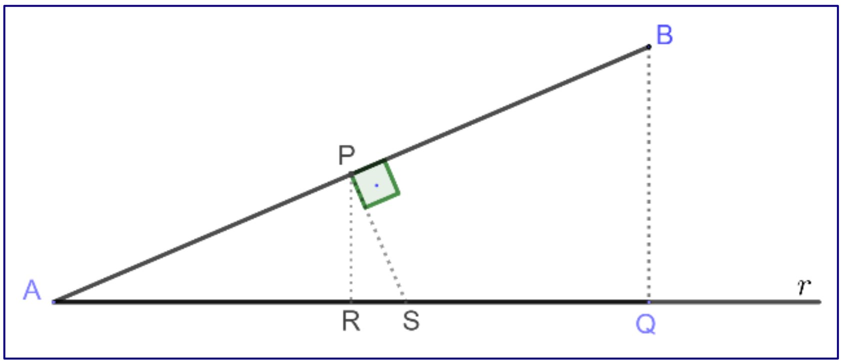
$$S = 2\,\pi\overline{PS}\,\overline{MN}.$$

2º caso: o segmento não é paralelo à reta r e tem uma extremidade sobre ela.

Vamos supor que o ponto A do segmento AB seja o ponto que pertence a reta r e vamos denotar por P o ponto médio do segmento AB.

Tracemos do ponto B a perpendicular BQ à reta r e do ponto P tracemos as perpendiculares PR e OS, respectivamente, à reta r e ao segmento AB.

Figura 5.16: Segmento oblíquo a reta e com uma extremidade sobre a reta



Fonte: Arquivo dos autores.

A área da superfície gerada por AB é, então a área da superfície lateral de um cone, dada por

$$S = \pi r g.$$

Como, neste caso, $r = \overline{BQ}$ e $\overline{PR} = \frac{1}{2}\overline{BQ}$, temos

$$S = 2\pi \overline{PR}\,\overline{AB}$$

Agora, observando que os triângulos AQB e PRS são semelhantes, como no caso anterior, resulta em:

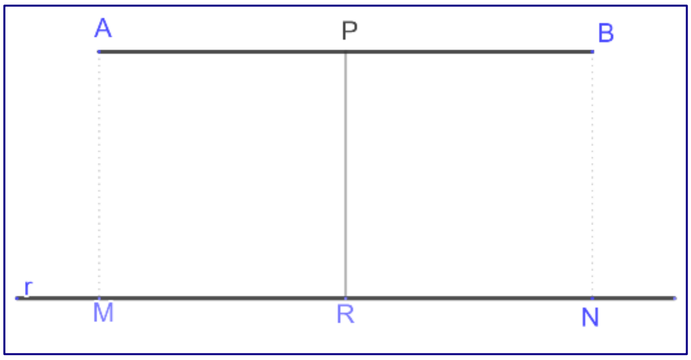
$$\frac{AB}{PS} = \frac{AQ}{PR} \Leftrightarrow \overline{PR}\,\overline{AB} = \overline{PS}\,\overline{AQ}$$

Assim, a expressão da área torna-se:

$$S = 2\,\pi \overline{PS}\,\overline{AQ}.$$

Terceiro caso: o segmento AB é paralelo à reta r.

Figura 5.17: Segmento paralelo a reta



Fonte: Arquivo dos autores.

Tracemos a partir dos pontos A, P e B as perpendiculares AM, PR e BN à reta r.
Observando que PR é o raio da superfície lateral do cilindro de revolução, gerado por AB, e quer MN é congruente a geratriz AB, a expressão da área dessa superfície é:

$$S = 2\pi rh = 2\pi\overline{PR}\ \overline{AB}.$$

Dos resultados obtidos nos três casos acima, temos o seguinte teorema.

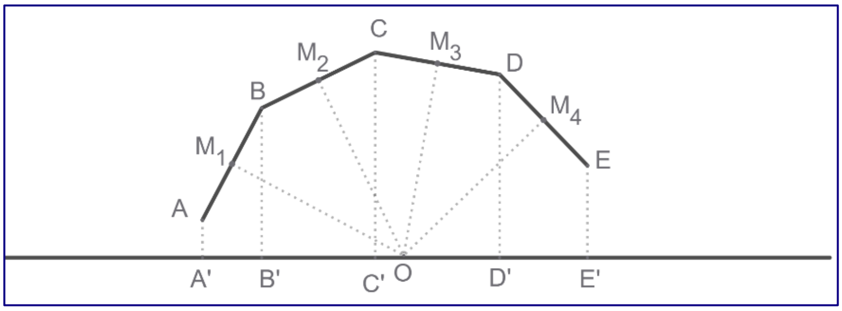
Teorema 5.1: A área da superfície gerada por um segmento de reta que dá uma rotação de *360°* em torno de uma reta, que, estando situada no mesmo plano desse segmento, não o atravessa nem lhe é perpendicular, é o produto da medida da projeção do segmento sobre a reta pelo comprimento da circunferência cujo raio é o segmento da mediatriz compreendido entre o segmento inicial e a reta.

5.8.2 ÁREA DA SUPERFÍCIE GERADA PELA ROTAÇÃO DE UMA LINHA POLIGONAL

Seja r uma reta e $ABCDE$ uma linha poligonal regular cujo centro é O, situada em um dos semiplanos determinados por r e que não atravessa a reta r.

Rotacionando o semiplano que contém esta linha poligonal, $ABCDE$, uma rotação de 360° em torno de r, a poligonal irá descrever uma superfície, cuja área é a soma das áreas das superfícies geradas pelos segmentos AB, BC, CD e DE. Projetemos os pontos A, B, C, D e E sobre a reta r, obtendo os respectivos pés das perpendiculares A', B', C', D' e E'. Observando agora que as mediatrizes dos lados BC, CD e DE, respectivamente, concorrem no ponto O e que, além disso, os segmentos OM_1, OM_2, OM_3 e OM_4 dessas mediatrizes são congruentes por serem apótemas dessa poligonal regular, podemos denotar por a medida comum desses segmentos OM_i, $i = 1, 2,3,4$.

Figura 5.18: Linha poligonal regular contida em um semiplano



Fonte: Arquivo dos autores.

Conforme vimos na secção anterior, as áreas das superfícies geradas pelos lados AB, BC, CD e DE são, respectivamente,

$$S_{AB} = 2\pi a\overline{A'B'},$$
$$S_{BC} = 2\pi a\overline{B'C'},$$
$$S_{CD} = 2\pi a\overline{C'D'},$$

e

$$S_{DE} = 2\pi a\overline{D'E'}.$$

Portanto, a área da superfície gerada pela poligonal $ABCDE$ é:

$$S_{ABCDE} = 2\pi a\left(\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'} + \overline{D'E'}\right) = 2\pi a\,\overline{A'E'}.$$

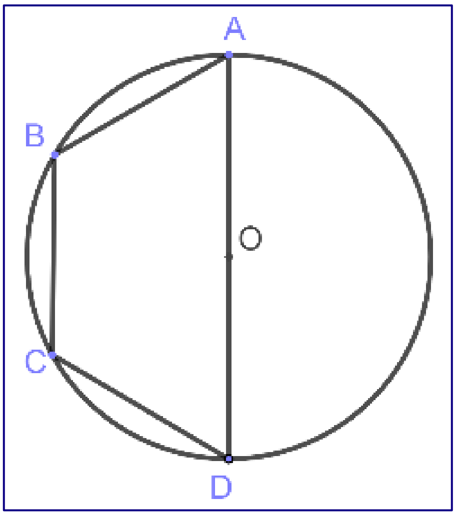
Em resumo, temos o seguinte teorema.

Teorema 5.2: A área da superfície gerada por uma linha poligonal regular convexa, que gira em torno de uma reta situada em seu plano, passando por seu centro e não a atravessando, é igual ao produto do comprimento da circunferência, cujo raio é o apótema dessa poligonal, pela projeção da poligonal sobre a reta.

5.8.3 EXPRESSÃO DA ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Consideremos um semicírculo de diâmetro AD e uma linha poligonal regular $ABCD$ nele inscrita.

Figura 5.19: Linha poligonal regular contida em semicircunferência



Fonte: Arquivo dos autores.

Representando por R o raio desse semicírculo, por S_1 a área da superfície gerada pela poligonal quando o semiplano, de origem na reta que passa por AD, que a contém, dá uma rotação de 360° em torno de AD, e denotando por a o apótema da poligonal, pelo Teorema anterior, podemos escrever:

$$S_1 = 2\pi a\overline{AD} = 2\pi a 2R.$$

Quando o número de lados da poligonal regular, inscrita no semicírculo, aumenta indefinidamente, seu apótema a terá como limite R, e, portanto, o limite da área S_1, ou seja, a área da superfície esférica será

$$S = 4\pi R^2.$$

5.8.4 ÁREA DA ZONA ESFÉRICA E DA CALOTA ESFÉRICA

Consideremos as poligonais regulares AB e BC, inscritas nos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{BC}$ de uma circunferência de raio R e seja a o seu apótema. As áreas geradas por essas poligonais num movimento de rotação de *360°* em torno do diâmetro AD, são, conforme seção anterior,

$$S_{AB} = 2\pi a\overline{A'B'},$$

e

$$S_{BC} = 2\pi a\overline{B'C'},$$

em que $A'B'$ e $B'C'$ são, respectivamente, as projeções de AB e BC sobre o diâmetro.

Aumentando indefinidamente os números de lados dessas poligonais e observando que seus apótemas tendem para R, os limites das áreas S_{AB} e S_{BC}, ou seja, respectivamente, a área da calota esférica (gerada pela rotação do arco $\widehat{AB}$) e da zona esférica (gerada pelo arco $\widehat{BC}$), serão, respectivamente, conforme secção anterior,

$$S_{AB} = 2\pi R\overline{A'B'},$$

e

$$S_{BC} = 2\pi R\overline{B'C'},$$

Observando que $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$ são as alturas, respectivamente, da calota e da zona esférica, podemos escrever a expressão única para área de uma zona ou de uma calota esférica, de altura h, numa esfera de raio R, como:

$$S = 2\,\pi R\,h.$$

5.8.5 ÁREA DO FUSO ESFÉRICO

Consideremos uma esfera de raio R, cuja área, como já sabemos, é $4\pi R^2$. Tomemos um diâmetro qualquer dessa esfera e tiremos por ele *360°* semiplanos, formando *360* diedros congruentes. Esses semiplanos determinarão sobre a superfície esférica *360* fusos congruentes, desse modo a área de cada um desses fusos será

$$\frac{4\pi R^2}{360}$$

ou seja,

$$S_{fuso} = \frac{\pi R^2}{90}.$$

Então, sendo esta a área do fuso de um grau (fuso cujo ângulo diédrico mede *1°*), a área do fuso de θ graus será

$$S_{fuso} = \frac{\pi R^2\,\theta}{90}.$$

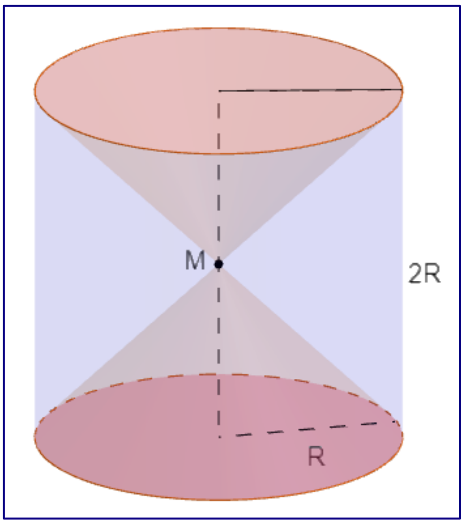
5.9 VOLUME DA ESFERA

5.9.1 CLEPSIDRA E ANTICLEPSIDRA

Considere um *cilindro equilátero* de raio R e M o ponto médio do seu eixo. Chama-se **clepsidra** a reunião de dois cones de revolução cujas bases são as bases do cilindro e cujo vértice comum é M.

Chama-se ***anticlepsidra*** o conjunto dos pontos do *cilindro equilátero* que não pertencem a clepsidra.

Figura 5.20: Clepsidra e anticlepsidra



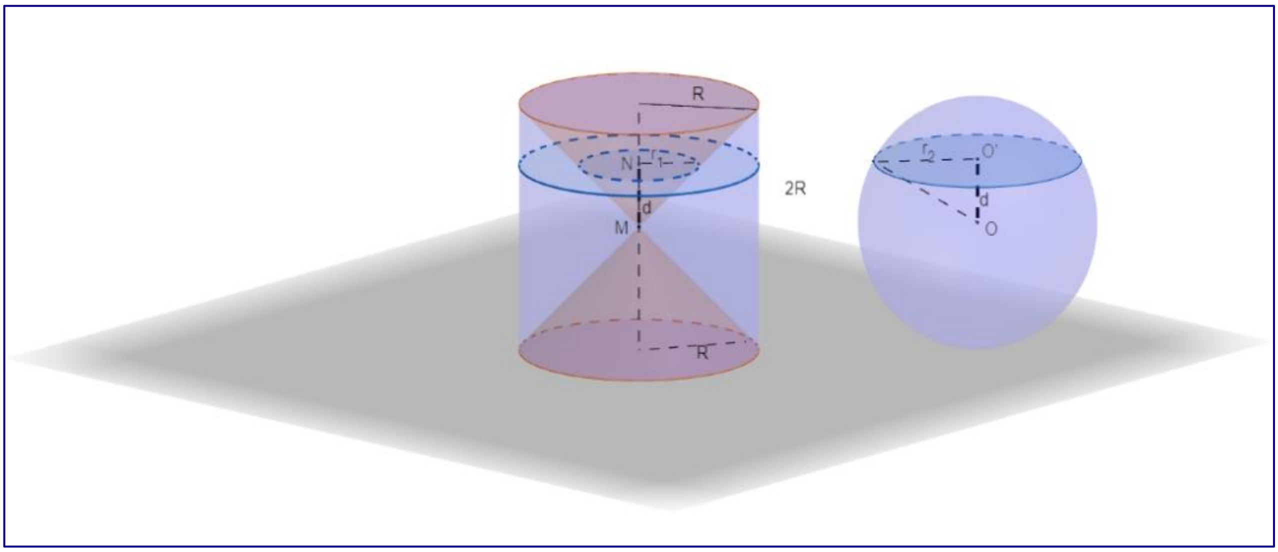
Fonte: Arquivo dos autores.

Para deduzirmos uma fórmula para o cálculo do volume de uma *esfera* de raio R, vamos inicialmente mostrar que esta esfera é equivalente a anticlepsidra do cilindro equilátero de raio R.

5.9.2 EXPRESSÃO PARA O VOLUME DA ESFERA

Considere uma esfera e um cilindro, ambos de raio R, apoiados em um plano β. Seja γ um plano paralelo a β à uma distância d do centro da esfera, e portanto, do vértice M dos cones da clepsidra.

Figura 5.21: Anticlepsidra e esfera apoiados em um mesmo plano



Fonte: Arquivo dos autores.

A secção determinada na esfera pelo plano γ é um círculo de raio r_2 e cuja área é dada pela fórmula

$$S = \pi {r_2}^2$$

a qual, pelo uso do teorema de Pitágoras, se transforma em,

$$S = \pi(R^2 - d^2),$$

em que d é a distância do plano γ ao ponto M.

A seção determinada na anticlepsidra é uma coroa circular cuja área é dada por

$$S' = \pi(R^2 - {r_1}^2).$$

Por semelhança dos triângulos obtidos (em um dos cones e no cone que surge após a secção), temos:

$$\frac{R}{r_1} = \frac{R}{d}$$

ou seja $Rd = Rr_1$, ou ainda, $r_1 = d$. Logo

$$S' = \pi(R^2 - d^2).$$

Daí temos que $S = S'$, isto é, qualquer plano paralelo a γ determina seções equivalentes nos dois sólidos (anticlepsidra e esfera). Então, pelo Princípio de Cavalière o volume da esfera é igual ao volume da anticlepsidra a qual é igual ao volume do cilindro menos o volume da clepsidra.

Sendo $V_{cilindro}$ o volume do cilindro, $V_{clepsidra}$ o volume da clepsidra e V_{esfera} o volume da esfera, podemos escrever:

$$V_{cilindro} = 2\pi R^3,$$

$$V_{clepsidra} = \frac{2}{3}\pi R^3$$

e

$$V_{esfera} = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

5.10 EXECÍCIOS

1. A interseção de um plano com uma esfera é um círculo de $14cm^2$ de área. Sabendo-se que o plano dista $2cm$ do centro da esfera, determine a área da superfície desta esfera.
2. Um plano determina sobre uma esfera de raio R uma secção, cujo raio é igual a distância do centro da esfera ao plano. Escreva a área da maior calota formada em função do raio da esfera.
3. Dois planos paralelos determinam sobre uma esfera de raio R duas secções de raios r_1 e r_2, respectivamente. Sabendo-se que o centro da esfera está entre os dois planos, calcule a área da zona esférica formada por estas secções.
4. Uma tangerina, em formato esférico, ao ser descascada, apresentou 11 gomos congruentes. Se o raio desta tangerina é de $2cm$, calcule o volume de cada gomo.
5. Uma esfera de raio R e um cone circular reto de raio R e altura $2R$ estão sobre um plano α. A que distância do plano α podemos traçar um plano β, paralelo a α, de modo que as secções desse plano com os dois sólidos sejam equivalentes?
6. A secção de uma esfera por um plano é um círculo cujo raio é igual a distância d do centro da esfera ao plano. Exprima o volume e a área da esfera em função de d.

SÓLIDOS INSCRITOS

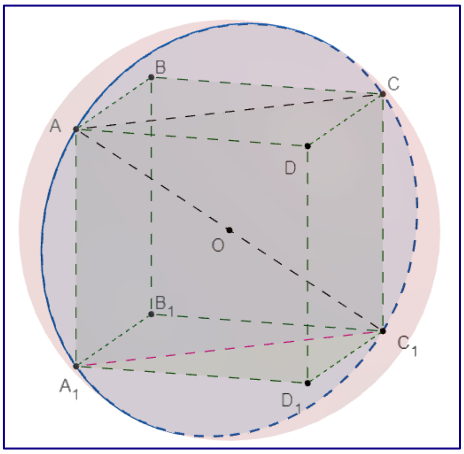
Neste capítulo estudamos sólidos inscritos em outros sólidos, estabelecendo relações entre suas áreas e seus volumes. Para simplificar as deduções das relações desejadas, baseado em CARVALHO (1969), consideramos os estudos de apenas alguns sólidos especiais onde são possíveis estabelecer relações referentes as áreas de superfícies e dos volumes dos dois sólidos envolvidos.

6.1 CUBO INSCRITO NUMA ESFERA

Considere um cubo, de área total S e volume V, inscrito numa esfera. Podemos exprimir a área desta esfera em função de S e o volume desta esfera em função de V.

Para isto, suponha que o cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tenha arestas medindo a e esteja inscrito numa esfera de raio R.

Figura 6.1: Cubo inscrito numa esfera



Fonte: Arquivo dos autores

Tracemos o plano diametral que contém as arestas opostas AA_1CC_1 do cubo. Este plano cortará a esfera segundo um círculo máximo e o cubo segundo um retângulo de vértices ACC_1A_1, inscrito neste círculo máximo, tendo como base a diagonal A_1C_1 da base do cubo e como altura a aresta do cubo que tem medida a.

A diagonal AC_1 desse retângulo coincide com uma diagonal do cubo e, portanto, é igual a $AC_1 = a\sqrt{3}$. Como essa diagonal é igual ao diâmetro da esfera (por ser igual ao diâmetro do círculo máximo que circunscreve o retângulo), podemos escrever

$$2R = AC_1 = a\sqrt{3},$$

ou seja,

$$4R^2 = 3a^2.$$

Como a área total do cubo, S, é igual a $6a^2$, temos que $3a^2$ será a metade desta área. Assim, podemos escrever

$$4R^2 = \frac{S}{2}.$$

Sendo a área da esfera igual a $4\pi R^2$, obtemos

$$S_{esfera} = 4\pi R^2 = \frac{S}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi S_{cubo}.$$

Por outro lado, sabendo que o volume do cubo é $V = a^3$ e que o volume da esfera é

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

e que $2R = a\sqrt{3}$, ou equivalentemente $\frac{2R}{\sqrt{3}} = a,$ obtemos

$$V_{cubo} = a^3 = \frac{(2R)^3}{\left(\sqrt{3}\right)^3} = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}}.$$

Logo

$$\frac{3\sqrt{3}\,a^3}{8} = R^3.$$

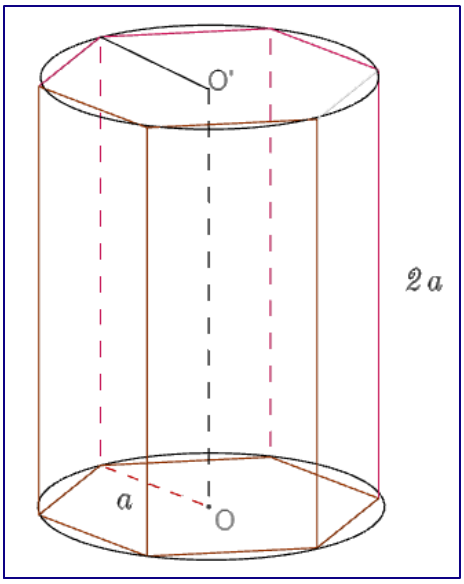
Portanto, o volume da esfera pode ser escrito como:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{3\sqrt{3}\,a^3}{8} = \pi\frac{\sqrt{3}\,a^3}{2} = \pi\frac{\sqrt{3}}{2} = V_{cubo}.$$

6.2 PRISMA HEXAGONAL INSCRITO EM UM CILINDRO EQUILÁTERO

Consideremos um prisma hexagonal cuja aresta mede a inscrito em um cilindro equilátero cujo raio da base mede R.

Figura 6.2: Prisma hexagonal inscrito em um cilindro equilátero



Fonte: Arquivo dos autores

Como o hexágono regular da base do prisma está inscrito no círculo que é base do cilindro, temos que $R = a$.

Já que o apótema da base do prisma é

$$AP_{prisma} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

sua área total é

$$\boldsymbol{S_{T_{prisma}} = 2\,S_b + 6\,S_L},$$

onde S_b denota a área da base do prisma, a qual é dada por

$$S_b = 6\,\frac{a\,AP_{prisma}}{2} = 6\,\frac{a\,\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = 6\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

e S_L denota a área da superfície lateral do prisma, a qual é dada por

$$S_L = 6aR = 6a2a = 12a^2.$$

Daí

$$S_{T_{prisma}} = 2(6\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}) + 12a^2 = 3a^2\sqrt{3} + 12a^2 = 3a^2(4 + \sqrt{3}).$$

Por outro lado, temos que a área total do cilindro equilátero é dada por

$$S_{T_{cilindro}} = 6\,\pi R^2 = 6\,\pi\, a^2.$$

Assim,

$$\frac{S_{T_{cilindro}}}{S_{T_{prisma}}} = \frac{6\pi a^2}{3a^2\left(4+\sqrt{3}\right)} = \frac{2\pi}{4+\sqrt{3}}.$$

Já o volume do cilindro é dado por

$$V_{cilindro} = \pi a^2 2a \ = \pi 2a^3,$$

ou equivalentemente

$$\frac{V_{cilindro}}{\pi} = 2a^3.$$

Por outro lado,

$$V_{prisma} = \ 6\frac{a^2\sqrt{3}}{2}2a == \ 6\frac{\sqrt{3}}{2}2a^3.$$

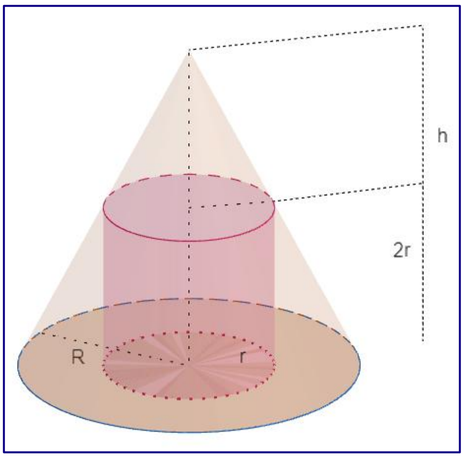
Logo

$$V_{prisma} = \ 6\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{V_{cilindro}}{\pi} = \ 6\frac{\sqrt{3}}{2\pi}V_{cilindro}.$$

6.3 CILINDRO INSCRITO EM UM CONE

Suponha que em um cone de revolução de raio da base R e altura h está inscrito um cilindro equilátero. Podemos escrever tanto a área da superfície do cilindro quanto o volume do cilindro em função de R e h que são elementos conhecidos do cone de revolução.

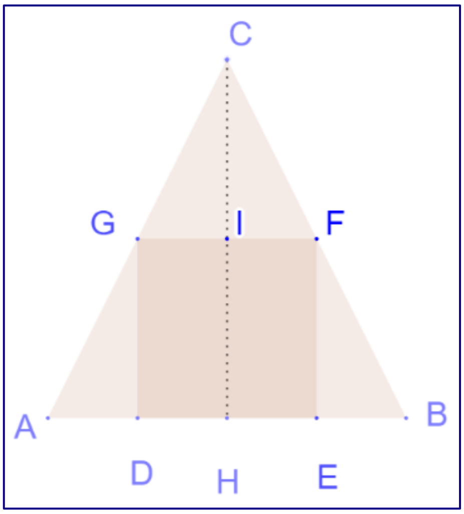
Figura 6.3: Cilindro inscrito em um cone



Fonte: Arquivo dos autores

De fato, sejam ABC os vértices de triângulo isósceles obtido pela secção meridiana do cone e o quadrado $DEFG$ obtido pela secção meridiana do cilindro.

Figura 6.4: Secção meridiana do cilindro inscrito em um cone



Fonte: Arquivo dos autores

Tracemos a altura CH do triângulo ABC (relativa ao vértice C). Podemos então escrever:

$$AH = R \text{ e } CH = h,$$

onde de R é o raio da base do cone e h é a altura do cone.

Denotemos por r o raio da base DH do cilindro inscrito. Como este cilindro é equilátero, segue que

$$DG = EF = 2r.$$

Da semelhança dos triângulos retângulos CIG e CHA, obtemos

$$\frac{\overline{CI}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{GI}}{\overline{AH}}. \tag{6.1}$$

Agora, observe que

$$\overline{GI} = \overline{DH} = r \text{ e } \overline{CI} = \overline{CH} - \overline{IH} = h - 2r.$$

Substituindo os valores acima na equação (6.1), obtemos

$$\frac{h - 2r}{h} = \frac{r}{R}$$

resultando em

$$r = \frac{Rh}{h + 2R}$$

Assim, a área lateral do cilindro equilátero pode ser escrita como:

$$S_L = 2\pi r(2r) = 4\pi r^2 = 4\pi \frac{R^2h^2}{(2R + h)^2}$$

Vamos, agora, encontrar uma relação entre o volume dos dois sólidos. Já que o volume do cone é dado por:

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

e o volume do cilindro é dado por

$$V_{cilindro} = \pi r^2(2r).$$

Usando o valor de $r = \frac{Rh}{h+2R}$ na fórmula do volume do cilindro, obtemos

$$V_{cilindro} = 2\,\pi \frac{(Rh)^3}{(2R + h)^3}.$$

Daí,

$$\frac{V_{cone}}{V_{cilindro}} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 h}{\frac{2\pi R^3 h^3}{(2R+h)^3}} = \frac{\pi R^2 h}{3}\frac{(2R+h)^3}{2\pi R^3 h^3} = \frac{(2R+h)^3}{6Rh^2}.$$

Portanto,

$$V_{cone} = \frac{(2R+h)^3}{6Rh^2} V_{cilindro}.$$

6.4 CILINDRO INSCRITO EM UM CUBO

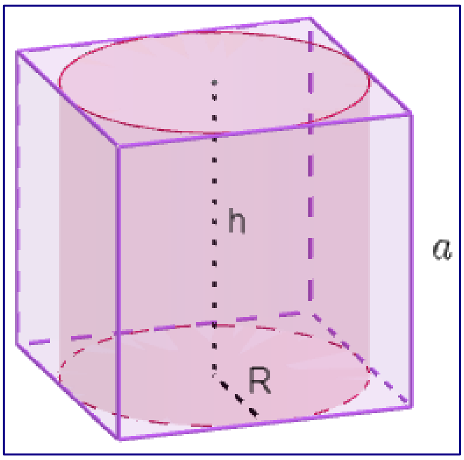
Considere um cubo com a área total S e nele um cilindro de revolução inscrito. Então, podemos exprimir em função de S a área total desse cilindro.

Seja a a medida da aresta do cubo. Então

$$S = 6a^2.$$

Como o cilindro está inscrito no cubo, suas bases são círculos inscritos em duas bases opostas do cubo. Logo o raio do círculo da base do cilindro é $R = \frac{a}{2}$.

Figura 6.5: Cilindro inscrito em um cubo



Fonte: Arquivo dos autores

Então, denotando por h a altura do cilindro, temos que $h = a$. Assim, sendo a área total do cilindro dada por

$$S_{T_{cilindro}} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi(R^2 + Rh).$$

Substituindo os valores de R e h obtidos acima como função de a obtemos:

$$S_{T_{cilindro}} = 2\pi\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a}{2}\ a\right) = \frac{\pi 3a^2}{2}.$$

Mas $3a^2 = \frac{S}{2}$. Logo,

$$S_{T_{cilindro}} = \frac{\pi S}{4}.$$

6.5 ALGUNS PROBLEMAS ENVOLVENDO INSCRIÇÃO E/OU CIRCUNSCRIÇÃO DUPLA

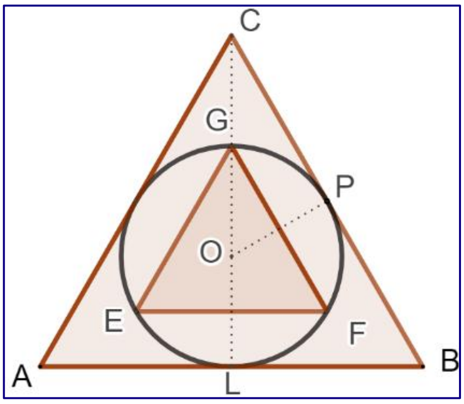
6.5.1 ESFERA INSCRITA E CIRCUNSCRITA EM CONES EQUILÁTEROS

Num cone equilátero está inscrito uma esfera e nesta esfera está inscrito um cone equilátero. Vamos demonstrar que a área total do cone menor é igual à quarta parte da área total do cone maior.

Para facilitar a visualização, vamos supor que os eixos dos dois cones coincidem. Tracemos então um plano meridiano do cone maior.

Já que o cone é equilátero, a secção deste cone com o plano meridiano será um triângulo equilátero ABC. A secção do plano com a esfera será um círculo inscrito neste triângulo e a secção do plano com o cone menor será um triângulo EFG inscrito neste círculo, conforme figura abaixo:

Figura 6.6: Secção meridiana da esfera inscrita e circunscrita em cones



Fonte: Arquivo dos autores

Denotando por R o raio da base do cone maior, lado do triângulo equilátero ABC, temos

$$AB = 2R \tag{6.2}$$

Como o raio $r = OP$ do círculo inscrito num triângulo equilátero de lado l é a terça parte da altura deste triângulo, temos:

$$r = \frac{l\sqrt{3}}{6}.$$

Assim, o raio OP que coincide com o raio da esfera é dado por

$$r = \overline{OP} = \frac{2R\sqrt{3}}{6} = \frac{R\sqrt{3}}{3}. \tag{6.3}$$

Como o lado do triângulo equilátero EFG inscrito no círculo de raio OP é dado por

$$\overline{EF} = \overline{OP}\,\sqrt{3}. \tag{6.4}$$

De (6.3) e (6.4) segue que

$$\overline{EF} = \frac{R\,\sqrt{3}}{3}\,\sqrt{3} = R. \tag{6.5}$$

Concluímos, então, que o raio da base do cone menor é a metade do raio da base do cone maior. Sendo, então R e $\frac{R}{2}$, respectivamente, os raios das bases do cone maior e do cone menor, suas áreas totais serão, respectivamente

$$S_{T\,(cone\ maior)} = \pi R\,(R + G) = \pi R(R + 2R) = 3\pi R^2,$$

onde $\mathrm{G} = 2R$ é a geratriz do cone maior, e

$$S_{T\,(cone\ menor)} = \pi r\,(r + g) = \pi r(r + 2r) = 3\pi r^2 = 3\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}3\pi R^2 = \frac{S_{t(cone\ maior)}}{4}.$$

6.5.2 CILINDRO E CONE EQUILÁTEROS CIRCUNSCREVENDO UMA MESMA ESFERA

Considere um cilindro e um cone equiláteros circunscritos a uma mesma esfera. Vamos escrever a razão do volume de cada sólido para sua área total em função do raio da esfera.

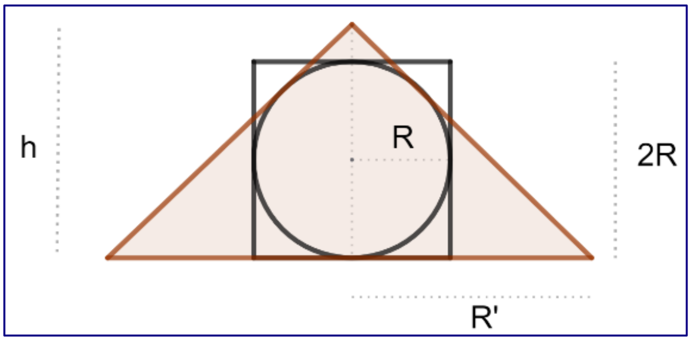
Denotemos por R o raio da esfera (que também é o raio do cilindro) e denotemos por R' o raio do cone.

Conforme vimos no problema anterior, o raio R da esfera expresso em função do R' da base do cone equilátero circunscrito à esfera é

$$R = \frac{R'\sqrt{3}}{3}.$$

Consequentemente, $R' = \sqrt{3}R$.

Figura 6.7: Secção meridiana de um cilindro e um cone equiláteros circunscrevendo uma mesma esfera



Fonte: Arquivo dos autores

No cilindro temos que a área total da superfície e o volume são dados por:

$$S_{T_{cilindro}} = 6\pi R^2 \text{ e } V_{cilindro} = \pi R^2 2R = 2\pi R^3.$$

Logo

$$\frac{V_{cilindro}}{S_{T_{cilindro}}} = \frac{2\pi R^3}{6\pi R^2} = \frac{R}{3}.$$

Na esfera, a área da superfície e o volume são dados por:

$$S_{esfera} = 4\pi R^2 \text{ e } V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Logo

$$\frac{V_{esfera}}{S_{esfera}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{R}{3}.$$

Já no cone, temos que a área total da superfície e o volume são dados por:

$$S_{T_{cone}} = 3\pi(R')^2 = 3\pi\left(R\sqrt{3}\right)^2 = 9\pi R^2,$$

e

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi(R')^2 h,$$

Mas, $R' = R\sqrt{3}$ e, como o cone é equilátero, a geratriz do cone é $2R'$. Então usando o Teorema de Pitágoras, temos

$$g^2 = h^2 + (R')^2,$$

ou seja,

$$(2R')^2 = h^2 + (R')^2.$$

Desta última equação obtemos

$$h = R'\sqrt{3}.$$

Assim,

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi\left(R\sqrt{3}\right)^2 R'\sqrt{3} == \frac{1}{3}\pi R^2 3R\sqrt{3}\sqrt{3} = 3\pi R^3.$$

Logo

$$\frac{V_{cone}}{S_{T_{cone}}} = \frac{3\pi R^3}{9\pi R^2} = \frac{1}{3}R.$$

6.6 EXERCÍCIOS

1. Em um cilindro equilátero de raio da base medindo R, está inscrito um paralelepípedo de base quadrada. Calcule a área lateral, a área total e o volume deste paralelepípedo em função de R.
2. Considere uma esfera circunscrevendo um cilindro equilátero, o qual circunscreve outra esfera. Mostre que a área total desse cilindro é igual a média aritmética das áreas das superfícies das esferas inscrita e circunscrita a esse cilindro.

3. Um prisma regular de base quadrática está inscrito em uma esfera de raio R. Sabendo-se que a aresta lateral do prisma é igual ao dobro da aresta da base, calcule a área total da superfície desse prisma e expresse a área da superfície e o volume da esfera em função da área da superfície total do prisma.
4. Um cubo de arestas medindo $4cm$ contém uma pirâmide regular, a qual tem como base uma das faces do cubo e seu vértice na face oposta. Calcule o volume da região interior ao cubo e exterior a pirâmide.

BARBOSA, J. L. M. B. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

CARVALHO, P.C. P. **Introdução à Geometria Espacial**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

CARVALHO, T. M. **Matemática, 2º ciclo.** Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas, 1969.

DI PIERRO NETO, S.; GOES, C.C. **Matemática na Escola Renovada**, **Volume 2**. São Paulo: Saraiva, 1970. Volume 2.

DI PIERRO NETO, S. **Matemática Volume 2, 2º Grau.** São Paulo: Scipione autores editores, 1993.

EVANS, K. "**3D Graphics**" [GeoGebra]. GeoGebra Team. Disponível em https://www.geogebra.org/m/bqngkerp. Acesso em 02 de julho de 2025.

BRZEZINSKI, T. "3**D Calculator**" [GeoGebra]. GeoGebra Team. Disponível em https://www.geogebra.org/3d?lang=pt. Acesso em 08 de julho de 2025.

LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; MORGADO, E. W. **A Matemática do Ensino Médio.** Rio de Janeiro: SBM, 1998. Volume 2

MARQUES, Vinícios. **Paralelos e Meridianos: o que são e como ajuda na localização geográfica**. Disponível em https://www.todamateria.com.br/paralelos-e-meridianos/. Acesso em 28/06/2025.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2013.