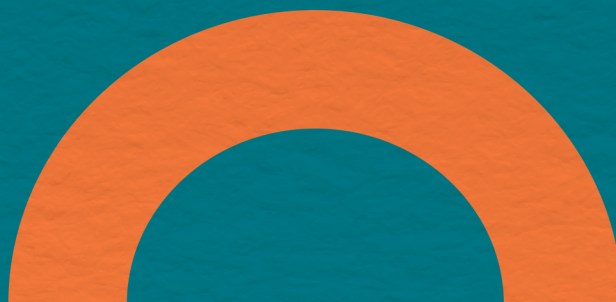


VII SEMAT

SEMANA DA MATEMÁTICA

**ENSINO DE MATEMÁTICA NA
AMAZÔNIA TOCANTINA:
POR UMA EDUCAÇÃO
TRANSFORMADORA E SUSTENTÁVEL**



EDITORIA CHEFE

Prof^o Me. Isabele de Souza Carvalho

EDITOR EXECUTIVO

Nathan Albano Valente

ORGANIZADORES DO LIVRO

Dalmi Gama dos Santos
Daniele Esteves Pereira Smith
Denivaldo Pantoja da Silva
José Renato Ferreira Alves da Cunha
Júlio Roberto Soares da Silva
Rubenvaldo Monteiro Pereira
William de Oliveira e Oliveira
Ryan Caldas Lima
Edilson Prazeres Rodrigues
Miguel Ângelo Rodrigues Mochel
Eraldo de Souza do Carmo
Raquel Maria da Silva Costa Furtado

2025 by Seven Editora

Copyright © Seven Editora

Copyright do Texto © 2025 Os Autores

Copyright da Edição © 2025 Seven Editora

PRODUÇÃO EDITORIAL

Seven Publicações Ltda

EDIÇÃO DE ARTE

Alan Ferreira de Moraes

EDIÇÃO DE TEXTO

Natan Bones Petitembertte

BIBLIOTECÁRIA

Bruna Heller

IMAGENS DE CAPA

Evellyn Thais de Souza

O conteúdo do texto e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Seven Publicações Ltda. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Seven Publicações Ltda é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação.

Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.



O conteúdo deste Livro foi enviado pelos autores para publicação de acesso aberto, sob os termos e condições da Licença de Atribuição Creative Commons 4.0 Internacional

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

S471

VII SEMAT [recurso eletrônico] : Ensino de Matemática na Amazônia Tocantina : Por uma educação transformadora / Dalmi Gama dos Santos... [et al.]. – São José dos Pinhais, PR: Editora Seven, 2025.
Dados eletrônicos (1 PDF).

ISBN 978-65-6109-208-1

1. Matemática - eventos. 2. Educação. 3. Amazônia – Brasil. I. Santos, Dalmi Gama dos. II. Smith, Daniele Esteves Pereira. III. Silva, Denivaldo Pantoja da. IV. Cunha, José Renato Ferreira Alves da. V. Título.

CDU 51:37

Bruna Heller - Bibliotecária - CRB10/2348

Índices para catálogo sistemático:

CDU: Ensino 37

CDU: Matemática 51

DOI: 10.56238/livrosindi202535-

Seven Publicações Ltda
CNPJ: 43.789.355/0001-14
editora@sevenevents.com.br
São José dos Pinhais/PR

AGRADECIMENTOS

A Comissão Organizadora da VII Semana da Matemática (SeMat) expressa sua profunda gratidão a todos(as) os(as) estudantes que contribuíram ativamente nas diversas comissões responsáveis pela realização do evento. Cada ação desempenhada foi essencial para o êxito da programação e para a consolidação de um ambiente acadêmico colaborativo e inspirador. Nosso reconhecimento se estende às seguintes comissões:

- Comissão Central de Apoio e Logística
- Comissão de Apoio
- Comissão de Brinde
- Comissão de Credenciamento
- Comissão de Lanche
- Comissão de Mídia
- Comissão de Ornamentação
- Comissão de Patrocínio
- Comissão de Recepção
- Comissão do 1º Copão

Destacamos, em especial, um agradecimento, ao discente Mateus Rodrigues das Neves, que exerceu com excelência a função de supervisor geral das comissões. Seu comprometimento, liderança e dedicação foram fundamentais ao longo de toda a organização da VII SEMAT, atuando de forma incansável em articulação com os demais membros do Centro Acadêmico de Matemática (CAMAT).

Agradecemos, de forma especial, ao corpo docente e técnico-administrativo da Faculdade de Matemática – FAMAT/UFPA, cujo apoio contínuo e comprometimento foram essenciais em todas as etapas de organização e realização da VII SeMat. O engajamento, a responsabilidade e a colaboração de cada professor(a) e técnico(a) contribuíram significativamente para o êxito do evento e para o fortalecimento da formação em Ensino de Matemática na Amazônia Tocantina.

Estendemos também nosso sincero agradecimento à Coordenação Geral do Campus Universitário do Tocantins – Cametá, pelo suporte institucional e logístico prestado, reforçando a importância da parceria entre os setores da universidade para o sucesso das ações acadêmicas e extensionistas.

Por fim, registramos nosso sincero agradecimento aos colaboradores que, com zelo e atenção, cuidam do nosso Campus Universitário. Seu empenho na organização dos espaços, no suporte logístico, na montagem e desmontagem de equipamentos e na preparação dos momentos de convivência, como os cafés e intervalos, foi essencial para que tudo ocorresse com harmonia e acolhimento.

Com respeito,

Comissão Organizadora da VII Semana da Matemática – SeMat
Faculdade de Matemática – FAMAT / UFPA – Campus Cametá

Muito obrigado!

ORGANIZADORES DO LIVRO

Comissão Organizadora

Docentes e Secretariado da Faculdade de Matemática (FAMAT – Campus Cametá / UFPA):

- Dalmi Gama dos Santos
- Daniele Esteves Pereira Smith
- Denivaldo Pantoja da Silva
- José Renato Ferreira Alves da Cunha
- Júlio Roberto Soares da Silva
- Rubenvaldo Monteiro Pereira
- William de Oliveira e Oliveira
- Ryan Caldas Lima

Equipe DTI / Campus Universitário do Tocantins - Cametá:

- Edilson Prazeres Rodrigues
- Miguel Ângelo Rodrigues Mochel

Coordenação Geral do Campus Universitário do Tocantins - Cametá:

- Prof. Eraldo de Souza do Carmo
- Profa. Raquel Maria da Silva Costa Furtado

Discentes Envolvidos

Comissão Central de Apoio e Logística

- Mateus Rodrigues das Neves (CAMAT)
- Leticia Viana e Silva (CAMAT)
- Juliane do Socorro Melo Rodrigues (Egressa FAMAT)

Comissão de Apoio

(Discentes)

Alcilene Sá Gonçalves, Alan Cleison Viana Wanzeler, Marcelo da Silva Ferreira, Raquel Gaia de Moraes, Thiago de Oliveira Siqueira, Vinicius Oliveira da Cruz

Comissão de Brinde

(Discentes)

Alana Magno Martins, Angélica Pereira dos Santos, Douglas Costa de Amorim, Elaine Wanzeler Nabiça, Elissandra Quaresma da Silva, Elizabeth de Oliveira Veiga, Elito Andrade Costa, Hemely de Assunção dos Anjos Ferreira, Jamile Ferreira Ribeiro, Luís Ricardo da Cruz Costa, Maisa Pereira da Silva, Maria Odilena Costa Afonso, Marcos Vinicius Ferreira Moraes, Sandy Brito Caldas, Vitória Veiga Miranda, Wender Ribeiro da Costa

Comissão de Credenciamento

(Discentes)

Adriane Oliveira Ferreira, Andreia Letícia Mendes Martins, Andrey Davy Silva Moreira, Douglas Lorrان Cabral Corrêa, Emilly Duarte Gaia, Gustavo Delgado Gama, Jacqueline da Silva Castro, Jamires Marques Castro Júnior, Nailson de Almeida Caldas, Ronald Sanches Garcia, Victor da Silva Pinto, Vinicius Siqueira Garcia

Comissão de Lanche

(Discentes)

Adebson Gomes Ferreira, Atilson Sá Gonçalves, Denilson Nunes, Edimara de Leão Rocha, Jemima Camilo de Oliveira, Jonnice Viana de Freitas, José Eduardo T. Mendonça, José Paulo Santos dos Santos, Kelvyn Rycharde Costa Correa, Luciane Correa Baia, Marcos Vinicius de Oliveira Gaia, Rafael dos Santos Castro, Rivaldo da Silva Brito, Rodrigo Rodrigues Corrêa, Sandro Samuel Alves Pereira, Valdisé Pereira Rodrigues, Vanessa Martins Sá, Wendel Melo da Cruz

Comissão de Mídia

(Discentes)

Bianca Cristiane da Silva Maia, Celton Rodrigues Ferreira, Davi dos Anjos Santos, Eduardo Henrique Chaves Magalhães, Emene Neto de Amorim Duarte, Guilherme da Cruz Sampaio, Joilson da Cruz Guimarães, Lailson Marinho Pastana, Paulo César Santiago da Silva, Raiane Sena Pacheco, Tatiane Camargo Pinto, Vanderlan Antonio Garcia Rodrigues, Vicente Martins de Oliveira Filho

Comissão de Ornamentação

(Discentes)

Alcilene Sá Gonçalves, Ana Beatriz Costa de Melo, Cleidiane da Trindade Maciel, Darley dos Santos Cardoso, Eduardo Costa Prazeres, Eduardo da Paixão Aquino, Felipe Arnaud Aquino, Felipe Monteiro Soares, Jessica Pinheiro Gonçalves, Maise Soares Lopes, Paola Wanzeler Dias, Valdisé Pereira Rodrigues

Comissão de Patrocínio

(Discentes)

Alex Portilho de Melo, Assis do Carmo Fiel, Guilherme de Jesus Chaves Rodrigues, Hiago Gabriel Moraes Louzada, Jamili Nunes dos Prazeres, Jociane Garcia de Oliveira, José Andrey Carvalho Barreiros, Leandro Farias Ferreira, Leonardo de Nazaré da Silva

Comissão de Recepção

(Discentes)

Elcione Almeida Viana de Oliveira, Gisele Moreira da Silva, Osveraldo Meireles Gaia

Comissão do 1º Copão

Clebson Lopes Gonçalves, Gustavo Delgado Gama, Leonardo de Nazaré da Silva, Marcos Vinicius Gomes de Moraes, Ronald Sanches Garcia, Samuel Drago Araújo da Silva, Victor da Silva Pinto

Conselho Editorial

- Prof. Dalmi Gama dos Santos (FAMAT / CUNTINS / UFPA)
- Profª. Daniele Esteves Pereira Smith (FAMAT / CUNTINS / UFPA)
- Prof. Denivaldo Pantoja da Silva (FAMAT / CUNTINS / UFPA)
- Prof. José Renato Ferreira Alves da Cunha (FAMAT / CUNTINS / UFPA)
- Prof. Júlio Roberto Soares da Silva (FAMAT / CUNTINS / UFPA)
- Prof. Rubenvaldo Monteiro Pereira (FAMAT / CUNTINS / UFPA)
- Prof. Fábio Colins (IEMCI / UFPA)
- Prof. Iran Abreu Mendes (IEMCI / UFPA)
- Prof. Laércio de Jesus Machado de Melo (PPGDOC / UFPA)
- Prof. Manoel Lucival da Silva Oliveira (EAUFGPA)
- Prof. Marcos Monteiro Diniz (ICEN / UFPA)
- Prof. Raimundo Leão (EAUFGPA)
- Prof. Romulo Everton de Carvalho Moia (EAUFGPA)
- Profª. Rita Sidmar Alencar Gil (IFPA Belém)
- Profª. Suellen Cristina Queiroz Arruda (FACET / CABAE / UFPA)

Organização Geral do E-Book

Prof. Dalmi Gama dos Santos (Coordenador Geral da VII SEMAT)

Universidade Federal do Pará – UFPA / Faculdade de Matemática – FAMAT

E-mail: dalmi@ufpa.br

Instituição Promotora

- **Faculdade de Matemática (FAMAT)**

Campus Universitário do Tocantins / Cametá – UFPA

Trav. Pe. Antônio Franco, 2617 – Bairro da Matinha

CEP 68400-000 – Cametá, Pará – Brasil

- **Telefones:** (91) 3781-1182
- **E-mails:** famatcuntins@ufpa.br | cuntinscameta@ufpa.br
- **Diretor da Faculdade:** Prof. Júlio Roberto Soares da Silva
- **Vice-Diretor:** Prof. Dalmi Gama dos Santos
- **Técnico:** William de Oliveira e Oliveira
- **Bolsista PROAD:** Ryan Caldas Lima

Redes Sociais

- **Instagram:** [@famat_cameta](https://www.instagram.com/famat_cameta)
- **Facebook:** Famat Cametá
- **Página Oficial da VII Semat:** <https://sematcameta.wixsite.com/my-site-1>

AUTORES DO LIVRO

- Lattes iD  Adebson Gomes Ferreira
- Lattes iD  Ademar Pinheiro Farias Júnior
- Lattes iD  Andreza Pastana Lopes
- Lattes iD  Aridelson Costa da Silva
- Lattes iD  Benedito Guimarães do Carmo Junior
- Lattes iD  Benedito Néto Andrade Ferreira
- Lattes iD  Bianca Cristiane da Silva Maia
- Lattes iD  Carolina Aiko Kaneko
- Lattes iD  Celton Rodrigues Ferreira
- Lattes iD  Clebson Lopes Gonçalves
- Lattes iD  César Bricio Ferrari
- Lattes iD  Dalmi Gama dos Santos
- Lattes iD  Daniele Esteves Pereira Smith
- Lattes iD  Danyelle Rego Barreto Soares
- Lattes iD  Denivaldo Pantoja da Silva
- Lattes iD  Eduardo Santos de Sousa
- Lattes iD  Edwin Soeiro Silva
- Lattes iD  Elizete Ferreira Morais Barbosa
- Lattes iD  Emilyly Duarte Gaia
- Lattes iD  Erik Leão Cavalcante
- Lattes iD  Erikles dos Santos Pantoja
- Lattes iD  Fabíola Campelo Ribeiro
- Lattes iD  Felipe Monteiro Soares
- Lattes iD  Francisco Ney Praseres Júnior
- Lattes iD  Fábio Colins
- Lattes iD  Fábio Ramos Fernandes
- Lattes iD  Geovane Nunes Garcia
- Lattes iD  Gustavo Delgado da Gama
- Lattes iD  Jamili Nunes dos Prazeres
- Lattes iD  Jamires Marques Castro Júnior
- Lattes iD  Jessica Pinheiro Gonçalves
- Lattes iD  Jonas Brito dos Santos
- Lattes iD  Josué Moraes Maia
- Lattes iD  José Andrey Carvalho Barreiros
- Lattes iD  José Ivan Alves Balieiro
- Lattes iD  José Renato Ferreira Alves da Cunha
- Lattes iD  José dos Santos Guimarães Filho

Lattes iD  Jânio Marcelo Castro Amaro Júnior

Lattes iD  Júlio Roberto Soares da Silva

Lattes iD  Kaik Barreto Mourão

Lattes iD  Leandro Farias Ferreira

Lattes iD  Leonardo de Nazaré da Silva

Lattes iD  Luzimara Wanzeler Moraes

Lattes iD  Lívia Jânia de Matos Silva

Lattes iD  Maicon de Oliveira Bacha

Lattes iD  Marcel Vinhas Bertolini

Lattes iD  Marcelo Mendes Medeiros

Lattes iD  Marcos Vinicius Ribeiro Machado

Lattes iD  Marluci Rodrigues Martins

Lattes iD  Mateus Rodrigues Das Neves

Lattes iD  Michael Jackson Carvalho Farias

Lattes iD  Milana Sagica Sardinha

Lattes iD  Osveraldo Meireles Gaia

Lattes iD  Ozias Alfaia da Costa

Lattes iD  Paola Wanzeler Dias

Lattes iD  Paula Rita da Silva de Menezes

Lattes iD  Raiane Sena Pacheco

Lattes iD  Raimunda do Carmo Serrão Mendes

Lattes iD  Rangel Ferreira da Silva

Lattes iD  Reinaldo Feio Lima

Lattes iD  Relinaldo Pinho de Oliveira

Lattes iD  Richr da Silva Marques

Lattes iD  Romulo Everton de Carvalho Moia

Lattes iD  Ronald Sanches Garcia

Lattes iD  Rubenvaldo Monteiro Pereira

Lattes iD  Samuel Drago Araújo da Silva

Lattes iD  Sandro Willian Viana Brito

Lattes iD  Sebastião Corrêa Valente

Lattes iD  Sueli Pantoja da Silva

Lattes iD  Suellen Cristina Queiroz Arruda

Lattes iD  Tatiane Camargo Pinto

Lattes iD  Ulisses Weyl da Cunha Costa

Lattes iD  Vanderlan Antonio Garcia Rodrigues

Lattes iD  Vanessa Martins Sá

Lattes iD  Victor da Silva Pinto

Lattes iD  Wesley Dantas Correa

APRESENTAÇÃO

A **Semana da Matemática (SeMat)** é um evento científico anual, de caráter regional, promovido pela Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará (UFPA), Campus Cametá. O encontro tem como propósito fortalecer a interação entre estudantes, professores(as), pesquisadores(as) e a comunidade em geral, valorizando o ensino, a extensão e a pesquisa nas áreas de Ensino de Matemática, Matemática, Educação Matemática, Didática da Matemática e Matemática Aplicada, sempre em diálogo com o contexto amazônico.

A **1ª edição da Semana da Matemática (SeMat)** foi realizada em **2015**, sob a coordenação da **Profa. Elany da Silva Maciel**, tendo como tema “O universo é escrito em linguagem matemática” com objetivo discutir a Matemática e seu ensino enquanto linguagem capaz de contribuir para o desenvolvimento da região da Amazônia Tocantina.

No ano de **2016**, a SeMat não ocorreu em razão de parte do corpo docente da Faculdade de Matemática – ainda reduzido naquele período – encontrar-se em licença para estudos de pós-graduação.

A **2ª edição** realizou-se em **2017**, sob a coordenação do **Prof. Rubenvaldo Monteiro Pereira**, e teve como tema “*Desafios e Perspectivas do Ensino da Matemática na Amazônia Tocantina*”.

A **3ª edição**, ocorrida em **2018**, foi coordenada pelo **Prof. Romulo Everton de Carvalho Moia** e trouxe como temática “*O Empoderamento do Professor que Ensina Matemática: implicações para o ensino*”.

A **4ª edição da SeMat**, realizada em **2019**, teve a coordenação do **Prof. Júlio Roberto Soares da Silva** e teve como tema “*Memórias, Desafios e Transformação*”. Essa edição destacou-se por integrar às discussões as comemorações pelos 30 anos do Curso de Matemática no Baixo Tocantins (Cametá).

Nos anos de **2020 e 2021**, em razão da pandemia da Covid-19, não foi possível realizar a Semana da Matemática. Nesse período, a comunidade acadêmica manteve suas atividades de diálogo científico por meio de webinários.

A **5ª edição**, já em contexto de retomada pós-pandemia, ocorreu em **2022** sob a coordenação do **Prof. José Renato Ferreira Alves da Cunha**, tendo como tema “*Desafios e Transformações no Ensino de Matemática*”.

A **6ª edição**, realizada em **2023**, foi coordenada pelo **Prof. Denivaldo Pantoja da Silva** e trouxe como tema “*Perspectivas e Avanços no Desenvolvimento e Ensino da Matemática na Amazônia Tocantina Paraense*”.

A **7ª Semana da Matemática**, em **2024**, foi coordenada pelo **Prof. Dalmi Gama dos Santos**, teve como tema “*Ensino de Matemática na Amazônia Tocantina: Por uma Educação Transformadora e Sustentável*”, enfatizando um ensino de Matemática capaz de promover transformações sociais e educacionais, sustentado por práticas inovadoras que favoreçam a formação docente e contribuam para o desenvolvimento científico, tecnológico e sustentável da região.

Realizada de **27 a 29 de novembro de 2024**, no **Campus Universitário do Tocantins/Cametá – UFPA**, a VII SeMat contou com a participação de cerca de **200 inscritos**, envolvendo estudantes da UFPA e de instituições da região do Baixo Tocantins. Foram **38 trabalhos aprovados** para publicação como capítulos de livro, apresentações de comunicações curtas, a contribuição de **10 palestrantes convidados** e a realização de **7 formações** (minicursos e oficinas), enriquecendo a programação do evento.

Além das atividades acadêmicas, a VII SeMat também promoveu o **1º Copão**, torneio esportivo organizado pela comunidade estudantil e o CAMAT, que reforçou a integração, o espírito de equipe e a dimensão cultural do evento.

A SeMat teve como público: pesquisadores(as) em Matemática, Educação Matemática e Áreas Afins; professores(as) e profissionais da Educação Básica, egressos(as); estudantes de Graduação e Pós-Graduação em Matemática, Educação Matemática, Matemática Pura e Aplicada, Didática da Matemática, Metodologia do Ensino, Matemática e suas Tecnologias, Formação de Professores e áreas correlatas.

Consolidada como um espaço de socialização do conhecimento, de fortalecimento da formação docente e de debate sobre a prática educativa em Matemática, a SeMat reafirma seu papel estratégico para o avanço da educação, da ciência e da tecnologia na região da Amazônia Tocantina, contribuindo de forma significativa para a construção de uma educação transformadora e sustentável.

Cametá, setembro de 2025.

Prof. Dalmi Gama dos Santos

Coordenação Geral da VII SeMat

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1.....17

  10.56238/livrosindi202535-001

LINGUAGENS E MEIO AMBIENTE: AS POSSIBILIDADES DO ENSINO DE LEITURA E DA ESCRITA EM MATEMÁTICA E LÍNGUA PORTUGUESA NA FUNDAÇÃO ESCOLA BOSQUE

Relinaldo Pinho de Oliveira, Elizete Ferreira Moraes Barbosa.

CAPÍTULO 2.....24

  10.56238/livrosindi202535-002

TEORIA ECONÔMICA: APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA NA COMERCIALIZAÇÃO DO AÇAÍ NO MUNICÍPIO DE MOCAJUBA-PA

Osveraldo Meireles Gaia, Tatiane Camargo Pinto, José Renato Ferreira Alves da Cunha.

CAPÍTULO 3.....33

  10.56238/livrosindi202535-003

VIVÊNCIAS INCLUSIVAS: UM RELATO DE PRÁTICAS NO ATENDIMENTO EDUCACIONAL ESPECIALIZADO

Jonas Brito dos Santos, Reinaldo Feio Lima.

CAPÍTULO 4.....41

  10.56238/livrosindi202535-004

CONTEXTUALIZANDO O ENSINO DE MATEMÁTICA EM UM TORNEIO DE XADREZ

Eduardo Santos de Sousa Livia, Livia Jânia de Matos Silva, Reinaldo Feio Lima.

CAPÍTULO 5.....48

  10.56238/livrosindi202535-005

MATEMÁTICA NAS MÃOS: INCLUSÃO POR MEIO DO USO DE TECNOLOGIAS ASSISTIVAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA PARA ESTUDANTES SURDOS

Josué Moraes Maia, Reinaldo Feio Lima, Richr da Silva Marques, Suellen Cristina Queiroz Arruda.

CAPÍTULO 6.....56

  10.56238/livrosindi202535-006

NÚMEROS NATURAIS: UMA COMPREENSÃO DA HISTÓRIA E A TRANSPOSIÇÃO EM LIVROS ESCOLARES

Celton Rodrigues Ferreira, Maicon de Oliveira Bacha, Denivaldo Pantoja da Silva.

CAPÍTULO 7.....65

  10.56238/livrosindi202535-007

CONHECIMENTOS NEUROCIENTÍFICOS DE ESTUDANTES DE MATEMÁTICA SOBRE DISCALCULIA

Sueli Pantoja da Silva, Fábio Colins.

CAPÍTULO 8	74
 10.56238/livrosindi202535-008	
ESTRATÉGIAS ALTERNATIVAS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA: VIVÊNCIAS DO PROGRAMA RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA NO ENSINO MÊDIO	
Ronald Sanches Garcia, Gustavo Delgado da Gama, Emilly Duarte Gaia, Sebastião Corrêa Valente, Daniele Esteves Pereira Smith.	
CAPÍTULO 9	82
 10.56238/livrosindi202535-009	
O ENSINO DE MATEMÁTICA PARA ALUNOS COM TRANSTORNO DO ESPECTRO AUTISTA	
Bianca Cristiane da Silva Maia, Denivaldo Pantoja da Silva, José dos Santos Guimarães Filho.	
CAPÍTULO 10	89
 10.56238/livrosindi202535-010	
A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA PARA EXPLORAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS NO ENSINO MÉDIO: UMA EXPERIÊNCIA DO PROGRAMA RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA	
Ronald Sanches Garcia, Gustavo Delgado da Gama, Victor da Silva Pinto, Sebastião Corrêa Valente, Daniele Esteves Pereira Smith.	
CAPÍTULO 11	98
 10.56238/livrosindi202535-011	
CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS MOBILIZADOS A PARTIR DO CULTIVO DA PIMENTA DO REINO NO QUILOMBO DE SANTO ANTÔNIO BAIÃO PARÁ	
Marcelo Mendes Medeiros, Fábio Ramos Fernandes, Daniele Esteves Pereira Smith.	
CAPÍTULO 12	106
 10.56238/livrosindi202535-012	
SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES APLICADA AO GPS	
Jamires Marques Castro Júnior, Felipe Monteiro Soares, Ozias Alfaia da Costa, Raiane Sena Pacheco, Rubenvaldo Monteiro Pereira.	
CAPÍTULO 13	115
 10.56238/livrosindi202535-013	
CONTRIBUIÇÕES DAS EXPERIÊNCIAS VIVENCIADAS NO PIBID MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DOCENTE	
Mateus Rodrigues das Neves, Rubenvaldo Monteiro Pereira.	
CAPÍTULO 14	123
 10.56238/livrosindi202535-014	
MEDIDAS MATEMÁTICAS NA PRODUÇÃO DE FARINHA: UMA ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE AS MEDIDAS TRADICIONAIS E AS INTERNACIONAIS	
Marcos Vinicius Ribeiro Machado, Wesley Dantas Correa, José Renato Ferreira Alves da Cunha.	

CAPÍTULO 15	130
 10.56238/livrosindi202535-015	
O CÁLCULO DIFERENCIAL APLICADO À ECONOMIA: UM ESTUDO SOBRE A IMPORTÂNCIA DAS FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS NA ANÁLISE MARGINAL	
Aridelson Costa da Silva, Felipe Monteiro Soares, Jamires Marques Castro Junior, Júlio Roberto Soares da Silva.	
CAPÍTULO 16	139
 10.56238/livrosindi202535-016	
IMPACTOS ECONÔMICOS E SOCIAIS DA COVID-19: ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE AS ÁREAS URBANAS E RURAIS DE BAIÃO, PARÁ	
Fabiola Campelo Ribeiro, Paula Rita da Silva de Menezes, Dalmi Gama dos Santos, Ulisses Weyl da Cunha Costa.	
CAPÍTULO 17	153
 10.56238/livrosindi202535-017	
OS MÉTODOS DE GRADIENTE E NEWTON APLICADOS A PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO	
José Andrey Carvalho Barreiros, Rubenvaldo Monteiro Pereira, Leonardo de Nazare da Silva, Ronald Sanches Garcia, Gustavo Delgado da Gama.	
CAPÍTULO 18	165
 10.56238/livrosindi202535-018	
TÉCNICAS DE MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO NO EGITO ANTIGO: UMA ANÁLISE HISTÓRICA E MATEMÁTICA	
Erik Leão Cavalcante, Geovane Nunes Garcia, Jessica Pinheiro Gonçalves, Luzimara Wanzeler Moraes, Paola Wanzeler Dias.	
CAPÍTULO 19	172
 10.56238/livrosindi202535-019	
ESTÁGIO SUPERVISIONADO: EXPERIÊNCIAS E VIVÊNCIAS INCLUSIVAS EM MATEMÁTICA	
Leandro Farias Ferreira, Leonardo de Nazaré da Silva, Denivaldo Pantoja da Silva.	
CAPÍTULO 20	181
 10.56238/livrosindi202535-020	
ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS: UMA PROPOSTA DE EXPERIMENTO PARA O EXERCÍCIO DA EQUAÇÃO DO CALOR	
Cézar Bricio Ferrari, Kaik Barreto Mourão.	
CAPÍTULO 21	189
 10.56238/livrosindi202535-021	
A ROBÓTICA EDUCACIONAL COMO ESTRATÉGIA PARA O ENSINO DE ESCALAS E MEDIDAS: UMA EXPERIÊNCIA NAS SERIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Vanderlan Antônio Garcia Rodrigues, Adebson Gomes Ferreira, Daniele Esteves Pereira Smith.	

CAPÍTULO 22.....196

  10.56238/livrosindi202535-022

TECELAGEM MAIA E A MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM MULTIDISCIPLINAR COM A UNIDADE BÁSICA DE PROBLEMATIZAÇÃO

José Ivan Alves Balieiro, Benedito Néto Andrade Ferreira, Daniele Esteves Pereira Smith.

CAPÍTULO 23.....204

  10.56238/livrosindi202535-023

POLÍGONOS DE REULEAUX: GENERALIZAÇÃO DE PI E APLICAÇÕES

Vanessa Martins Sá, Rubenvaldo Monteiro Pereira.

CAPÍTULO 24.....213

  10.56238/livrosindi202535-024

A UTILIZAÇÃO DO JOGO TWISTER COMO FERRAMENTA LÚDICA PARA O ENSINO DE DIVISIBILIDADE: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA

Andreza Pastana Lopes, Samuel Drago Araújo da Silva.

CAPÍTULO 25.....220

  10.56238/livrosindi202535-025

A IMPORTÂNCIA DOS PROGRAMAS PRP E PIBID PARA A REALIZAÇÃO DA I FEMAT

Danyelle Rego Barreto Soares, Milana Sagica Sardinha, Suellen Cristina Queiroz Arruda, Reinaldo Feio Lima.

CAPÍTULO 26.....226

  10.56238/livrosindi202535-026

UM OLHAR INTERDISCIPLINAR ENTRE GEOMETRIA ESPACIAL E A GEOMETRIA MOLECULAR NAS AULAS DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Marluci Rodrigues Martins, Rubenvaldo Monteiro Pereira.

CAPÍTULO 27.....233

  10.56238/livrosindi202535-027

RELATO DE EXPERIÊNCIA: TUTORIA DISCENTE NO ANO DE 2024

Ozias Alfaia da Costa, Júlio Roberto Soares da Silva.

CAPÍTULO 28.....240

  10.56238/livrosindi202535-028

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA OS ANOS INICIAIS: UMA VISÃO A PARTIR DE PROFESSORES DA REGIÃO DA ILHA GAMA – CAMETÁ/PA

Francisco Ney Praseres Júnior, Romulo Everton de Carvalho Moia.

CAPÍTULO 29.....249

  10.56238/livrosindi202535-029

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM CIRCUITOS ELÉTRICOS RL E RLC

Raimunda do Carmo Serrão Mendes, José Renato Ferreira Alves da Cunha.

CAPÍTULO 30.....260

  10.56238/livrosindi202535-030

A INCLUSÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL: EPISTEMOLOGIA E IMPASSES NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Leonardo de Nazaré da Silva, Leandro Farias Ferreira, Denivaldo Pantoja da Silva.

CAPÍTULO 31.....270

  10.56238/livrosindi202535-031

INICIAÇÃO À PROGRAMAÇÃO EM PYTHON APLICADO EM OBJETOS DE CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS: RELATO DAS EXPERIÊNCIAS VIVENCIADAS

Jamili Nunes dos Prazeres, Mateus Rodrigues das Neves, Dalmi Gama dos Santos.

CAPÍTULO 32.....278

  10.56238/livrosindi202535-032

GEOMETRIAS: UMA ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA DO 2º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Jânio Marcelo Castro Amaro Júnior, Ademar Pinheiro Farias Júnior, Denivaldo Pantoja da Silva.

CAPÍTULO 33.....289

  10.56238/livrosindi202535-033

SOLUÇÃO FRACA PARA UM PROBLEMA FÍSICO DE VIBRAÇÕES SOBRE CORDAS TRANSVERSAIS A PARTIR DO ESPAÇO DE SOBOLEV

Benedito Guimarães do Carmo Junior, Júlio Roberto Soares da Silva.

CAPÍTULO 34.....299

  10.56238/livrosindi202535-034

UM REPASSO SOBRE TEOREMA DE EULER E TEOREMA DE WILSON

Clebson Lopes Goncalves, Michael Jackson Carvalho Farias, Júlio Roberto Soares da Silva.

CAPÍTULO 35.....305

  10.56238/livrosindi202535-035

UM REPASSO SOBRE CONGRUÊNCIAS LINEARES E CLASSES RESIDUAIS: APLICAÇÕES ENVOLVENDO QUESTÕES DO EXAME NACIONAL DE QUALIFICAÇÃO DO PROFMAT

Erikles dos Santos Pantoja, Rangel Ferreira da Silva, Júlio Roberto Soares da Silva.

CAPÍTULO 36.....317

  10.56238/livrosindi202535-036

RACIONALIDADE EM $\mathbb{Q}_p$

Carolina Aiko Kaneko.

CAPÍTULO 37.....324

  10.56238/livrosindi202535-037

HOMOTOPIA E CLASSIFICAÇÃO DO MCG DO TORO

Edwin Soeiro Silva, Marcel Vinhas Bertolini.

O TEOREMA DA CONVERGENCIA DOMINADA DE LEBESGUE

Sandro Willian Viana Brito, Dalmi Gama dos Santos.

LINGUAGENS E MEIO AMBIENTE: AS POSSIBILIDADES DO ENSINO DE LEITURA E DA ESCRITA EM MATEMÁTICA E LÍNGUA PORTUGUESA NA FUNDAÇÃO ESCOLA BOSQUE

  10.56238/livrosindi202535-001

Relinaldo Pinho de Oliveira

E-mail: relinaldopinhodeoliveira@gmail.com

Elizete Ferreira Morais Barbosa

E-mail: prof.elizetemorais@gmail.com

RESUMO

Este trabalho, relato de experiência, teve como objetivo proporcionar aos alunos o desenvolvimento de atividades de linguagens Matemáticas e da Língua Portuguesa, através da Educação Ambiental na Fundação Escola Bosque, no sentido de aprimorar a leitura e escrita dos discentes. O estudo consta de pesquisa qualitativa, na metodologia os dados foram descritos por meio de observação. A amostra consta de 80 alunos do 7º ano das turmas: Cobra Grande (Manhã) e Tamanduá (Tarde), no qual os discentes produziram, cartazes, pinturas, dança e o conceito de educação ambiental em blocos de notas. Em Matemáticas os alunos trabalharam com a análise geométrica dos recipientes descartáveis, o conhecimento dos diferentes períodos necessários para o acondicionamento dos materiais fabricados nas embalagens e o tempo de decomposição dos mesmos no meio ambiente, de forma interdisciplinar, os alunos elaboraram textos explorando a importância da reciclagem, a organização dos vários tipos de resíduos e seu tempo de decomposição na natureza. O aporte teórico foi voltado às temáticas de linguagens, educação ambiental e leitura e escrita. Os resultados demonstram que utilizando atividades de aprendizagem do contexto do alunado, os conteúdos passam a ter significados, despertam o interesse com assuntos do cotidiano, sendo trabalhados de forma dinâmica e prática.

Palavras-chave: Linguagens, Matemática, Português, Educação Ambiental, Leitura e Escrita.

1 INTRODUÇÃO

Na atual conjuntura, observa-se que as transformações políticas, educacionais, ambientais e sociais (econômicos e culturais) provocadas pela dinâmica da globalização e pelas transformações antrópicas, tem suscitado impactos na vida da população, principalmente na educação escolar, no entendimento das linguagens em Língua Portuguesa e em Matemática, no tocante ao desenvolvimento da leitura e escrita, assim como, nos saberes da educação escolar e nas políticas voltadas à preservação do meio ambiente.

Ao reconhecer a relevância dessas questões, surgiu o objetivo proporcionar aos alunos o desenvolvimento de atividades fazendo uso das linguagens da Matemática e de Língua Portuguesa, com as abordagens em Educação Ambiental na Fundação Escola Bosque, no sentido de aprimorar não somente o ensino de leitura e escrita dos discentes, mas orientar os alunos a cuidar do meio ambiente da escola e do contexto de vivência, na perspectiva dos vários tipos de

linguagens.

Vistas por esse prisma, Bakhtin (2014) concebe a linguagem como uma atividade produzida em um meio social e histórico definido, a compreende partindo de sua natureza social e mostra ser necessário estar inserido em uma organização social, para que se desenvolva a consciência, a comunicação e a linguagem. Corroborando com a ideia, Abaurre (2017), enfatiza que:

A Linguagem é uma atividade humana que, nas representações de mundo que constrói, revela aspectos históricos, sociais e culturais. É por meio da linguagem que o ser humano organiza e dá forma às suas experiências. Seu uso ocorre tanto na interação social, que pressupõe a existência de interlocutores, quanto na reflexão sobre nós mesmos e o mundo em que vivemos.

Desse modo, as linguagens proporcionam aos discentes compreender as situações que estão ao seu redor concretamente, permite não apenas refletir sobre a linguagem temática, a educação ambiental, e sobre o ensino de leitura e escrita, mas abre espaço para entender as principais diferenças entre os seres humanos, os animais e o meio ambiente, as possibilidades do ser humano expressar suas emoções por meio da linguagem é o ponto de partida para entender o contexto no qual está inserido na sociedade.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 LINGUAGENS E EDUCAÇÃO AMBIENTAL

Desde os primórdios da humanidade a comunicação e a interação são necessidades humanas desde sempre, basta lembrar dos desenhos das cavernas. A linguagem é uma atividade humana, e é por meio dela que realizamos o processo comunicativo, que dialogamos e interagimos com outras pessoas. Neste processo comunicativo podemos fazer uso da linguagem verbal (palavras faladas ou escritas). A linguagem verbal é aquela que se realiza por meio da palavra, seja ela falada ou escrita (Abaurre, 2017). Neste sentido, as atividades de produção textual dos discentes configura bem tal afirmativa.

A linguagem não verbal (os símbolos, as cores, os ícones, os gestos, os desenhos e imagens) ou a linguagem mista (uma combinação entre a linguagem verbal e a não verbal). Já na linguagem mista, os discentes elaboram atividades com cartazes, com texto escrito, desenhos, pinturas, painéis.

Após essa atividade os alunos fizeram uma caminhada ecopedagógica pelas trilhas da Escola Bosque, podendo demonstrar e expor suas produções textuais e artísticas para toda a comunidade escolar. Teve música, palavras de ordem em homenagem e defesa ao meio ambiente. Pode-se perceber que os alunos gostaram muito desse tipo de atividade, pois puderam fazer uso das diversas linguagens para externar suas ideias, tiveram a oportunidade de socializar

as informações que fora compartilhada entre as turmas e seus professores, demonstraram grande satisfação em todas as tarefas cumpridas.

Nesse contexto, observa-se que fazendo uso das linguagens em língua portuguesa e em matemática e a educação ambiental possibilitou aos discentes entender a importância de cuidar do meio ambiente, cuidar do seu contexto local e dos espaços sociais para se ter uma melhor qualidade de vida, e uma natureza mais bem preservada. Vale ressaltar que educar ambientalmente, de acordo com (Lisboa, 2017), significa:

Ir além da apropriação de conceitos e processos que digam respeito ao ambiente, a aquisição de visões de mundo que possibilitem o respeito ao ambiente a todas as formas de vida e o entendimento de que a vida só se dá pelas complexas teias tecidas pelos elementos naturais e socioculturais que se entrelaçam. (LISBOA et. Al, 2012 Pág. 25).

Em consonância com a concepção de educação ambiental, os PCN, (Brasil), enfatizam que:

O trabalho de Educação Ambiental desse ser desenvolvido a fim de ajudar os alunos a construir uma consciência global de questões relativas ao meio para que possam assumir posições afinadas com os valores referentes às suas proteções e melhoria. Para isso, é importante que possam atribuir significado aquilo que pretendem sobre a questão ambiental. E esse significado é resultado da ligação que o aluno estabelece entre o que aprende e a sua realidade cotidiana (...). A perspectiva ambiental oferece instrumentos para que o aluno possa compreender problemas que afetam a sua vida, a de sua comunidade, a de seu país e a do planeta (op. Cit., p.30).

Por esse viés, o trabalho de Educação Ambiental deve ser desenvolvido no sentido de ajudar os educandos a edificarem uma consciência integral das questões concernentes ao contexto para que possam adotar posições afinadas com os valores referentes à sua proteção e melhoria.

2.2 O SIGNIFICADO DE MEIO AMBIENTE NA PERCEPÇÃO DOS ALUNOS

Os alunos construíram atividade de produção textual conceituando a temática meio ambiente / educação ambiental. Várias foram as interpretações, “o meio ambiente para mim é cuidar das plantas e dos animais, e principalmente do mar, que é para nós consumir, sem ele nós não vivemos e os animais vão morrer. Por isso, não devemos sujar ele, por isso não podemos deixar o lixo no chão.” (Aluno da turma Jaguatirica, 2023). Outro aluno descreve que o meio ambiente “é maravilhoso, mas as pessoas não valorizam. Eu amo o meio ambiente. Ele é lindo, é cheio de animais e eu amo isso, eu amo as árvores e a água.” (Aluno da turma Cobra Grande, 2023).

Nesse sentido, é de suma relevância que os alunos desenvolvam a consciência do que é o meio ambiente e educação ambiental, mas principalmente, que eles possam compreender a importância de preservação ambiental, que eles fazendo uso das linguagens para criar os mecanismos de intervir em suas realidades, portanto, observou-se que os alunos puderam compreender a amplitude das questões ambientais, e, que ao mesmo tempo tenham uma visão contextualizada da realidade ambiental, de forma a impregnar no fazer pedagógico e nas práticas de produção das linguagens e no contexto de sala de aula.

Os alunos realizaram atividades de matemáticas, onde recolheram embalagens de medicamentos, pesquisando sobre sua configuração geométrica, bem como, essa configuração é determinante para o melhor acondicionamento dos produtos, assim como seu tempo de decomposição. A linguagem utilizada para comunicar matematicamente foi a escrita, a oral e a pictórica. Ao realizarem essa atividade os alunos puderam perceber na prática que podemos utilizar várias maneiras diferente para comunicar a matemática, correlacionando-a com as situações do cotidiano, construindo com os discentes um conhecimento significativo, no qual os mesmos exerceram o protagonismo das atividades, uma vez que os próprios discentes explicaram os trabalhos deles com os próprios colegas de turma.

Em outra atividade de matemática os alunos utilizando embalagens de garrafa peti, onde apresentaram as formas geométricas presentes nas embalagens, os detalhes simétricos e matemáticos presentes no fundo da embalagem, diminuindo em decorrência disso sua área de contato com o refrigerador, evitando o congelamento do líquido, a posição correta de acondicionamento, que é na posição vertical. Os alunos detalharam as figuras geométricas utilizando textos, desenhos e a apresentação oral, com isso puderam perceber a importância da geometria presente nas embalagens e, como essa geometria pode ser um facilitador na reciclagem e no tempo de decomposição das mesmas na natureza.

Para analisar essas várias formas de comunicação/informação, utilizamos Mayer (2009, p. 61) que se baseou em um modelo de processamento cognitivo para representar o sistema de processamento de informações humano. Nele, as imagens e as palavras advindas do ambiente externo via uma mensagem multimídia são admitidas na memória sensorial através da visão e audição, sendo ali mantidas por um brevíssimo período de tempo, como réplicas exatas de mensagens captadas. A centralidade da aprendizagem multimídia está centrada na memória de trabalho, Mayer (2009, p.62).

A figura a seguir (Figura 01) esquematiza esse processo e apresenta o modelo cognitivo da aprendizagem multimídia. A proposta desse esquema busca representar como funciona o sistema humano de processamento de informações, Mayer (2009, p.61).

Figura 01: Esquema de Processamento de comunicação/informação



Fonte: livro didático

Segundo a Teoria Cognitiva de Aprendizagem Multimídia a comunicação parte de três suposições advindas do campo das ciências cognitivas, chamadas de “*dual-channel, limited-capacity, and active-learning processing*” Mayer (2009, p.68). A primeira, do *canal- duplo*, sugere que as pessoas possuem canais separados para processar estímulos auditivos e visuais. Tais sistemas se intreragem, mas são essencialmente diferentes. A hipótese de *capacidade-limitada* se refere ao limite dacapacidade de processamento cognitivo que os seres humanos têm em cada um dos canais, sendo capaz de lidar apenas com certa quantidade de informações por vez.

3 METODOLOGIA

O trabalho foi realizado com alunos do 7º ano do ensino fundamental das turmas: Cobra Grande (Manhã) e Tamanduá (Tarde) da Fundação Escola Bosque, no qual os discentes construíram, através de cartazes, pinturas, música, dança produção de conceito de educação ambiental em blocos de notas. Em linguagens Matemáticas os alunos desenvolveram a partir da análise geométrica das embalagens dos produtos, o conhecimento dos diferentes períodos necessários para o acondicionamento desses produtos e o tempo de decomposição dos mesmos no meio ambiente. Na parte de Língua Portuguesa os alunos construíram textos explorando a importância da reciclagem, a organização dos vários tipos de resíduos e seu tempo de decomposição na natureza. Assim como, em relação a educação ambiental, os discentes estudaram os conceitos de educação ambiental, meio ambiente, preservação da natureza, reciclagem, os impactos que os produtos de embalagens, garrafas pets, material de papelão e demais produtos causam no meio ambiente, e qual a função dos alunos em disseminar as informações em seus contextos de vivência e no espaço da Escola Bosque.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir das atividades realizadas junto com os alunos podemos observar, que a necessidade de comunicarmos os saberes através de várias formas de comunicação, como: oral, escrito, gestual, pictórico, virtual, etc., sendo esses meios facilitadores do processo de construção e aprendizagem de linguagens, como a Língua Portuguesa e a Matemática. Neste sentido, observou-se que essas tarefas se mostraram uma excelente oportunidade de experienciar teorias de comunicação, como a Teoria Cognitiva da Aprendizagem Multimídia, o aprimoramento e desenvolvimento da leitura e da escrita. Desse modo, esses processos proporcionaram aos alunos o exercício da autonomia, criticidade e análise dos conteúdos, conceitos referentes ao meio ambiente e a aplicação deles no cotidiano, suas implicações e a influência no contexto local e regional. Portanto, os discentes puderam vivenciar as diferentes experiências proporcionada pelas diversas formas de expressar a comunicação científica no ambiente escolar e assim, disseminar as aprendizagens no contexto de suas comunidades, nos espaços da escola e em qualquer ambiente, pois o meio ambiente envolve tudo e todos, portanto, cada indivíduo também é elemento primordial para o meio ambiente.

REFERÊNCIAS

- ABAURRE, Maria Luiza et al. *A linguagem*. São Paulo: Santillana, jul. 2017.
- BAKHTIN, Michael. *Marxismo e filosofia da linguagem*. 16. ed. São Paulo: Huditec, 2014.
- BARBOSA, Rodrigo Miranda. Las críticas a Marshall McLuhan. *Infoamérica – Revista Iberoamericana de Comunicación*, v. 7-8, p. 145-158, 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: meio ambiente, saúde*. Brasília, DF: Secretaria de Educação Fundamental, 2011.
- LISBOA, Cassiano Pamplona et al. *Educação ambiental: da teoria à prática*. Porto Alegre: Mediação, 2012.
- MAYER, Richard E. *Cognição e aprendizagem humana*. São Paulo: Cultrix, 1981.

TEORIA ECONÔMICA: APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA NA COMERCIALIZAÇÃO DO AÇAÍ NO MUNICÍPIO DE MOCAJUBA-PA

  10.56238/livrosindi202535-002

Osveraldo Meireles Gaia

E-mail: osveraldogaia12@gmail.com

Tatiane Camargo Pinto

E-mail: tatiane.pinto@cameta.ufpa.br

José Renato Ferreira Alves da Cunha

E-mail: jrecunha@gmail.com

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo aplicar conhecimentos de integral definida na teoria econômica especificamente em contextos da microeconomia, para cálculo dos excedentes no processo de comercialização do açaí no município de Mocajuba-PA. Para isso foi feito uma análise de dados na feira da cidade e uma pesquisa bibliográfica sobre o tema abordado. Os resultados da pesquisa apontam que a integral definida é uma ferramenta eficaz para determinar os excedentes do consumidor, produtor e total nesse contexto de comercialização do fruto na feira da cidade

Palavras-chave: Integrais na economia, Excedentes econômicos, Microeconomia.

1 INTRODUÇÃO

O **cálculo integral** é uma poderosa ferramenta matemática utilizada nas mais variadas áreas das ciências e, por isso, está presente na grade curricular de muitos cursos de graduação, tais como: Engenharia, Física, Química, entre outros. Os conceitos do cálculo da integral são estudados pela humanidade há séculos; esses conceitos foram sendo aperfeiçoados ao longo do tempo, e grandes nomes deram suas contribuições ao avanço do cálculo, como Arquimedes, Kepler e Fermat. No século XVII, Newton e Leibniz chegaram, de forma independente, a importantes resultados no campo do cálculo e, por isso, são considerados os criadores dessa área. Após esses, outros grandes nomes contribuíram para o aperfeiçoamento da teoria, como: L'Hôpital, Lagrange, D'Alembert, Cauchy, Weierstrass e Riemann.

O presente trabalho tem como foco de estudo a **teoria econômica** e aplicações utilizando as **integrais definidas**. Para isso, utilizamos o conceito de teoria econômica baseado na Microeconomia e, em seguida, especificamos modelos simples de aplicações na economia, tais como o **excedente do consumidor**, **excedente do produtor** e o **excedente total**, que relaciona os dois anteriores. Trataremos de definir algumas ferramentas para aplicação dos nossos cálculos: integrais definidas juntamente com o **Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)**. Nosso foco não é demonstrar detalhadamente as definições e teoremas, mas apresentar a noção dos conceitos aprendidos durante

as aulas de Cálculo 2. Essas definições nos ajudarão a desenvolver os cálculos dos excedentes: produção, consumo e total.

A investigação sobre o tema foi feita considerando as circunstâncias do processo de comercialização do **açaí** na feira da cidade de **Mocajuba**, especificamente na época da safra (de agosto até dezembro), período em que o fruto gera fonte de renda para diversas famílias da zona ribeirinha e movimenta significativamente a economia do município. Desse modo, delimitamos o trabalho aos excedentes de consumo, produção e total, visando utilizar os conhecimentos do cálculo integral em uma área aplicada, como a economia.

O presente trabalho tem como foco de estudo a teoria econômica e fazer aplicações utilizando as integrais definidas. Para isso, utilizamos o conceito de teoria econômica baseada na Microeconomia e, logo, especificaremos modelos simples de aplicações na economia, tais como: o excedente de consumo, o excedente de produção e o excedente total, que relaciona os excedentes anteriores. Trataremos de definir algumas ferramentas para aplicação de nossos cálculos: integrais definidas, juntamente com o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Nosso foco não é demonstrar as seguintes definições e teoremas, mas dar a noção dos conceitos aprendidos durante as aulas de Cálculo 2. Essas definições nos ajudarão a desenvolver os cálculos dos excedentes: produção, consumo e total.

A investigação sobre o tema foi feita devido às circunstâncias do processo de comercialização do **açaí** na feira da cidade de Mocajuba, na qual, nessa específica época do ano (agosto até dezembro), tem-se a safra do **açaí**, fruto que gera fonte de renda para diversas famílias na zona ribeirinha e movimenta a economia do município. Desse modo, especificaremos o trabalho apenas nos excedentes de consumo, produção e total, para utilizar os conhecimentos do cálculo integral em outras áreas, como a economia.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A teoria econômica está subdividida entre Macroeconomia e Microeconomia. Esses termos foram criados com o objetivo de definir algumas particularidades da economia. A Macroeconomia é a área do estudo econômico que aborda o funcionamento de um sistema econômico, ou seja, ela estuda os itens que alteram a economia de uma cidade, estado ou país. Enquanto a Microeconomia estuda o comportamento de vários fatores econômicos, mais de forma individual, ela trabalha com os preços de um determinado bem ou serviço, baseando-se em alguns princípios para explicar como são gerados os preços finais dos produtos. Dois principais princípios são o da "oferta e demanda": o termo "oferta" se refere à quantidade disponível de um produto, e a "demanda" é a quantidade que os consumidores querem adquirir. Para explicar esses princípios, ela se baseia em três teorias: teoria do

consumidor (excedente do consumidor), teoria da empresa e teoria da produção (excedente do produtor).

O excedente do consumidor, ou superavit, é o ganho monetário obtido pelos consumidores, que são capazes de comprar um produto por um preço menor do que eles estariam dispostos a pagar; e o superavit do produtor, ou excedente dos produtores, é a quantia que os produtores se beneficiam vendendo a um preço de mercado maior do que o mínimo que eles estariam dispostos a vender — isto é, aproximadamente igual ao lucro. Pois, sendo uma função que determine a demanda e oferta de mercado, os excedentes serão determinados pela área delimitada pelas funções demanda, oferta e preço de mercado. Conseguimos determinar o excedente utilizando a integral definida. Sendo assim, definimos algumas ferramentas para a realização do cálculo dos excedentes.

Definição 1 (Integral Definida):

Se f é uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o *intervalo* $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$. Sejam $a = x^0, x^1, \dots, x_n = b$, as extremidades desses subintervalos, e sejam $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ pontos amostrais arbitrários nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}^*, x_i^*]$. Então a integral definida de f de a até b é

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é integrável em $[a, b]$.

Desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é integrável em $[a, b]$.

Teorema 1 (Teorema Fundamental do Cálculo - TFC)

Se f for contínua em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

onde F é uma primitiva de f , isto é, uma função tal que $F' = f$.

Demonstração: A demonstração desse teorema encontra-se nos livros STEWART (2008, p. 324) e GUIDORIZZI (2001, cap. 11). Desse modo, apresentaremos as definições dos excedentes, as respectivas demonstrações de suas equações são feitas utilizando a integral definida e o TFC.

Definição 2 (Excedente do Consumo):

O excedente do consumo representa a quantidade total de dinheiro que os consumidores economizam ao comprar um produto pelo preço $\bar{p}$ correspondente a uma quantidade demandada de $\bar{q}$. O Excedente do Consumo, denotado por E_c , para a função de demanda $p = f(q)$ de um produto, é assim expresso:

$$E_c = \left[\int_0^{\bar{q}} f(q) dq - \bar{p} - \bar{q} \right] \quad (1)$$

onde p é o preço unitário estabelecido pelo mercado e q a quantidade vendida do produto.

Definição 3 (Excedente do Produtor):

A diferença entre os preços que o produtor realmente recebe pela venda com preço praticado pelo mercado e o preço no qual ele estaria disposto a receber na venda do produto é chamada de excedente de produção. O excedente da produção, denotado por E_p , para a função de oferta $p = g(q)$, considerando um produto a um preço p , é assim expresso:

$$E_p = \bar{p} \cdot \bar{q} - \int_0^{\bar{q}} g(q) dq \quad (2)$$

onde p é o preço unitário estabelecido pelo mercado e q a quantidade vendida do produto.

Definição 4 (Excedente Total):

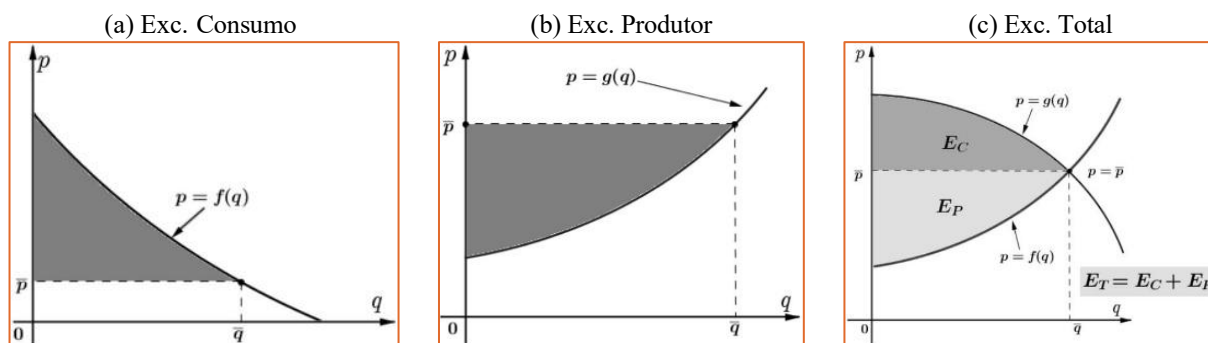
A soma do excedente do consumidor com o excedente do produtor resulta no chamado excedente total (denotado por E_T), expresso no contexto da economia de mercado, onde o preço de mercado $\bar{p}$ é obtido a partir da igualdade entre a função demanda e a função oferta, isto é $f(q) = g(q)$, ou seja, o preço de mercado é igual ao chamado preço de equilíbrio, que corresponde ao ponto de interseção entre a função demanda $p=f(q)$ e a função oferta $p=g(q)$.

$$E_T = E_C + E_P \quad (3)$$

Demonstração: A demonstração detalhada dessas equações pode ser consultada na dissertação de Barros et al. (2013, p. 73–78).

Vamos ilustrar a interseção através dos seguintes gráficos,

Figura 1: Excedentes Econômicos



2.1 PROBLEMÁTICA DA PESQUISA

Nos meses de agosto a dezembro ocorre a safra do açaí no município de Mocajuba, no estado do Pará. Nessa época do ano, a maioria dos produtores realiza a comercialização do fruto na feira da cidade. Em decorrência desse contexto, surge o seguinte questionamento que norteia este projeto:

Como a teoria econômica e o cálculo integral podem contribuir para a comercialização do açaí no município de Mocajuba-PA?

Nosso objetivo é aplicar conhecimentos matemáticos, especialmente o cálculo integral, dentro da teoria econômica, para o cálculo dos excedentes gerados na comercialização do açaí.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

A abordagem da pesquisa é de caráter quantitativo, com o intuito de identificar qual é o lucro do produtor em uma determinada lata (rasa) de açaí ou o valor economizado por um determinado consumidor que estaria disposto a pagar um preço e conseguiu comprar por um valor menor. Trata-se de uma pesquisa aplicada, voltada para uma situação vivenciada por moradores do município de Mocajuba, no estado do Pará.

Inicialmente, foi realizada uma coleta de dados sobre a variação do preço do açaí na feira de Mocajuba-PA, para posterior análise. Em seguida, procedeu-se a uma pesquisa bibliográfica sobre a teoria econômica, com ênfase na microeconomia, abordando suas divisões e utilidades em um determinado mercado.

Posteriormente, foi feito um estudo aprofundado sobre a **integral definida** e como essa ferramenta poderia ser utilizada no cálculo dos excedentes (do produtor, do consumidor e total) no processo de comercialização do açaí na feira de Mocajuba-PA. Além disso, buscou-se uma função que apresentasse melhor aproximação para a realização dos cálculos. Por fim, a realidade dos produtores e consumidores de açaí nesse município foi contextualizada por meio de uma aplicação prática.

4 APLICAÇÕES

- 1) Um feirante batedor de açaí fez uma pesquisa sobre a média do preço da lata de açaí e está disposto a pagar até R\$ 40,00. No entanto, ao ir comprar a lata de açaí, verifica-se que o valor das latas é de apenas R\$ 30,00 cada. Qual será o excedente do consumidor, sabendo-se que a função demanda é dada por:

$$f(q) = -1,1 \cdot q + 41,1.$$

Solução:

a função dada por $f(q) = 41,1 - 1,1 \cdot q$, note que $30 = 41,1 - 1,1 \cdot q$, tem-se $\bar{p} = 30$, $\bar{q} = 10$, assim da equação (1), vem que $E_c = \int_0^{10} (41,1 - 1,1 \cdot q) - 30 \cdot 10$ integrando e aplicando o TFC, resulta

$$E_c = \left(41,1 \cdot 10 - \frac{1,1 \cdot 10^2}{2} \right) - \left(41,1 \cdot 0 - \frac{1,1 \cdot 0^2}{2} \right) - 300.$$

Obtemos,

$$E_c = (411 - 55) - 300 = 56.$$

Logo, $E_c = 56$ Reais

- 2) Um produtor de açaí no município de Mocajuba-PA, sai de sua propriedade na zona ribeirinha para vender suas “rasas” (lata de açaí) a R\$ 10,00 reais na feira. Chegando ao local de venda ele consegue vender seu produto a R\$ 25,00 reais. A função oferta é dada por $g(q) = 2,5 \cdot q + 7,5$. Qual o excedente do produtor?

Solução: dada $g(q) = 2,5 \cdot q + 7,5$, então note que, $25 = 2,5 \cdot q + 7,5$, então $\bar{q} = 7$ e $\bar{p} = 25$.

Assim, utilizando o E_p da equação (2):

$$E_p = 25 \cdot 7 - \int_0^7 (2,5 \cdot q + 7,5) dq$$

Integrando, vem

$$E_p = 175 - \left(7,5 \cdot q + \frac{2,5 \cdot q^2}{2} \right) \Big|_0^7$$

aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo temos:

$$E_p = 175 - \left[\left(7,5 \cdot 7 + \frac{2,5 \cdot 7^2}{2} \right) - \left(7,5 \cdot 0 + \frac{2,5 \cdot 0^2}{2} \right) \right]$$

obtemos,

$$E_p = 175 - (113,75)$$

logo $E_p = 61,25$ Reais

3) Um outro produtor de açaí no município de Mocajuba faz uma pesquisa de mercado para identificar os valores de demanda e os valores de oferta, com o intuito de determinar um valor de equilíbrio e o excedente total para a comercialização do seu produto, e detecta que as funções de oferta e demanda são dadas por:

$$E_c = f(q) = -1,1 \cdot q + 41,1$$

$$E_p = g(q) = 2,5 \cdot q + 7,5$$

O equilíbrio do mercado é encontrado quando $f(q) = g(q)$, de modo que $\bar{q}$ é a quantidade unitária.

$$f(q) = g(q) \Rightarrow -1,1 \cdot q + 41,1 = 2,5 \cdot q + 7,5 \Rightarrow \bar{q} = 9,3$$

Obtida a quantidade de equilíbrio, calculemos o preço de equilíbrio:

$$f(9,3) = -1,1 \cdot 9,3 + 41,1 = 30,87$$

assim, para o produtor comercializar seu produto terá que produzir aproximadamente 9,3 rasas e vender a 30,87 reais. Calculando o excedente do consumidor:

$$E_c = \int_0^{9,3} (41,1 - 1,1 \cdot q) dq - 30,87 \cdot 9,3 = 334,7 - 287,1 = 47,6$$

Calculando o excedente do produtor:

$$E_p = 30,87 \cdot 9,3 - \int_0^{9,3} (2,5 \cdot q + 7,5) dq = 287,1 - 177,86 = 109,24$$

Calculados E_C e E_P , faremos uso da equação (3) e, desse modo, teremos o excedente total de mercado:

$$E_T = E_C + E_P$$

Sabe-se que $E_C = 47,6$ e $E_P = 109,24$, substituindo na equação (3), temos:

$$E_T = 47,6 + 109,24 = 156,84$$

Logo, $E_T = 156,84$ reais

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho pretendeu mostrar que a integral definida pode ser aplicada em muitos contextos do cotidiano, dentre eles, calcular por exemplo a quantidade de rasas de açaí para que o produtor não tenha prejuízos e fique por dentro dos seus ganhos em uma determinada venda, assim como determinar quanto um consumidor pode economizar em uma determinada compra e encontrar o ponto de equilíbrio deste mercado. Vale ressaltar que esse trabalho se delimitou na especificidade da microeconomia, e seria muito interessante expandir a pesquisa para a área da macroeconomia.

REFERÊNCIAS

BARROS, L. E. W. B. de et al. *Cálculo: um estudo de suas aplicações às áreas financeira e econômica*. João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba, 2013.

FULINI, M. *História do cálculo diferencial e integral*. [S.l.], 2017.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. Vol. 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

STEWART, J. *Cálculo*. Vol. 1. São Paulo: Thomson Learning, 2008.

VIVÊNCIAS INCLUSIVAS: UM RELATO DE PRÁTICAS NO ATENDIMENTO EDUCACIONAL ESPECIALIZADO

 Crossref  10.56238/livrosindi202535-003

Jonas Brito dos Santos
E-mail: jonasbritto2001@gmail.com

Reinaldo Feio Lima
E-mail: reinaldo.lima@ufpa.br

RESUMO

Este estudo relata uma experiência inclusiva realizada no Atendimento Educacional Especializado (AEE) da Escola Estadual Pedro Teixeira, localizada na cidade de Abaetetuba/PA, onde foram desenvolvidas atividades psicopedagógicas voltadas a um aluno com deficiência intelectual. As práticas aplicadas – construção de um labirinto, jogo de raciocínio rápido e quebra-cabeça do alfabeto – foram estrategicamente planejadas para estimular o desenvolvimento de habilidades cognitivas, motoras e sociais, fortalecendo a autoconfiança e promovendo a participação ativa do aluno. A fundamentação teórica do trabalho é baseada na Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva (BRASIL, 2008), que propõe práticas adaptativas para a inclusão de alunos com deficiência no ensino regular, e nas teorias de Vigotski (2003), que enfatizam a importância das interações sociais para o desenvolvimento cognitivo. O estudo evidencia o papel das atividades lúdicas e interativas na construção de uma aprendizagem significativa, demonstrando como o ambiente inclusivo e adaptado pode contribuir para o crescimento integral dos alunos, atendendo às suas necessidades específicas em um ambiente escolar acolhedor e participativo.

Palavras-chave: Atendimento Educacional Especializado, Relato de Experiência, Deficiência Intelectual, Atividades Psicopedagógicas.

1 INTRODUÇÃO

A inclusão de estudantes com deficiência no ensino regular tem sido um dos grandes desafios para a educação contemporânea, sobretudo no que diz respeito à adaptação das práticas pedagógicas às necessidades específicas de cada aluno. No Brasil, a Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva (BRASIL, 2008) estabelece diretrizes para garantir a inclusão escolar de alunos com deficiência, seja ela intelectual, física ou sensorial, no sistema regular de ensino. Contudo, o sucesso dessa política depende da implementação de leis, e transformação das práticas pedagógicas e organização escolar, com foco na personalização do ensino. Nesse contexto, as atividades psicopedagógicas têm ganhado destaque como ferramentas valiosas para o desenvolvimento de habilidades cognitivas e motoras em alunos com deficiência intelectual (D.I).

Este artigo tem como foco o relato de uma experiência vivenciada na sala Multifuncional do Atendimento Educacional Especializado (AEE) da Escola Estadual de Ensino Fundamental e

Médio Pedro Teixeira, onde foram desenvolvidas atividades psicopedagógicas com um aluno com Deficiência Intelectual, destacando o impacto dessas práticas na sua formação educacional e social. Para isso, temos como objetivo relatar a aplicação de atividades psicopedagógicas voltadas para um aluno com Deficiência Intelectual (D.I) na escola Pedro Teixeira.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O relato é analisado à luz de teorias sobre educação inclusiva e desenvolvimento cognitivo, como Vigotski (2003) e a Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva (BRASIL, 2008), que propõe adaptar as práticas pedagógicas às necessidades de cada aluno. A aplicação de atividades lúdicas no Atendimento Educacional Especializado (AEE), como construção de labirintos e jogos interativos, estimula habilidades cognitivas e motoras, conforme Fonseca (2004) e Kishimoto (2011), que destacam o valor das práticas motivadoras no aprendizado inclusivo.

3 METODOLOGIA

O presente trabalho baseia-se em uma abordagem qualitativa, utilizando o método de relato de experiência. As atividades desenvolvidas foram registradas por meio de observação direta, com acompanhamento de profissionais especializados da escola. As práticas realizadas foram elaboradas de acordo com as necessidades específicas do aluno, visando estimular suas habilidades cognitivas, psicomotoras e sociais.

As atividades foram divididas em três etapas principais: (1) construção e travessia de um labirinto, (2) um jogo interativo chamado "Pense Rápido", e (3) um quebra-cabeça do alfabeto. O registro visual das atividades também foi utilizado como suporte para análise, destacando momentos importantes de interação e aprendizagem.

4 RELATO DE EXPERIÊNCIA

A experiência relatada ocorreu na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio (EEEFM) Pedro Teixeira, localizada em Abaetetuba, Pará. O aluno participante, matriculado no 7º ano do ensino fundamental, possui Deficiência Intelectual (DI) e recebe acompanhamento regular do Atendimento Educacional Especializado (AEE) da escola. As atividades desenvolvidas foram cuidadosamente planejadas e supervisionadas pela professora regente e por um acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática, com o objetivo de estimular habilidades cognitivas, motoras e sociais do aluno, contribuindo para seu desenvolvimento global dentro de uma perspectiva inclusiva.

Atividade 01: Construção e Travessia de um Labirinto

A primeira atividade consistiu na construção de um labirinto no chão da sala de aula, utilizando fita adesiva. A atividade foi planejada para estimular a concentração, a coordenação motora e a comunicação entre os participantes. O aluno foi orientado a construir o labirinto sob a supervisão da professora, exigindo que ele se concentrasse nos detalhes da tarefa, desenvolvendo sua capacidade de planejamento e execução.

Após a construção, o aluno guiou o estagiário vendado através do percurso, utilizando comandos como "frente", "esquerda" e "direita". Essa prática foi importante para fortalecer sua autoconfiança e aprimorar sua habilidade de comunicação. Posteriormente, os papéis foram invertidos, e o aluno atravessou o labirinto seguindo minhas orientações, demonstrando concentração e memória visual. As figuras 01 e 02 mostram o aluno na construção e trilhando o labirinto.

Figura 01 e 02: Aluno construindo e trilhando o labirinto



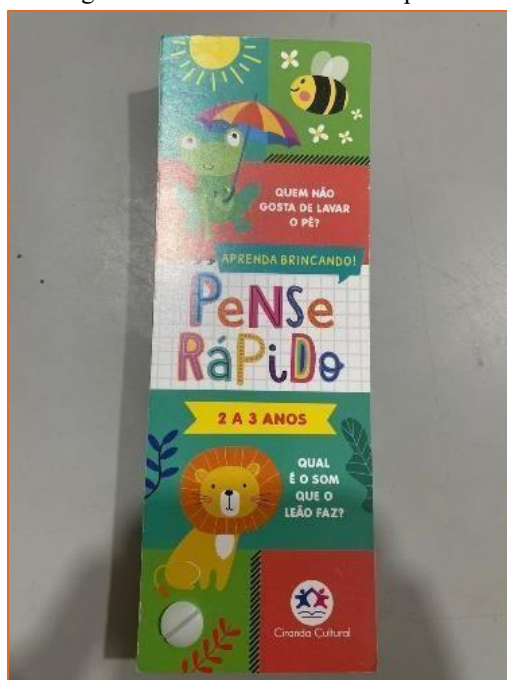
Fonte: Acervos pessoal do autor, 2024.

A interação social e a troca de papéis nessa atividade podem ser explicadas à luz da teoria de Vygotsky (1997), que sugere que o desenvolvimento cognitivo ocorre por meio da interação social. O aluno, ao me guiar e ser guiado em seguida, teve a oportunidade de aprender e se desenvolver em colaboração, fortalecendo a construção de habilidades interpessoais. Além disso, a atividade de coordenação motora, como a construção e travessia do labirinto, se alinha com Fonseca (2004), que aponta que atividades práticas ajudam alunos com DI a melhorar a concentração e as habilidades motoras.

Atividade 02: "Pense Rápido"

A segunda atividade, intitulada "Pense Rápido", foi desenvolvida para estimular a leitura, interpretação e agilidade mental. Dois alunos participaram, criando um ambiente de competição saudável. Um dos alunos lia um comando de um livrinho, enquanto o outro respondia o mais rápido possível, promovendo um processo de raciocínio lógico e interação social. A figura 03 apresenta o livro utilizado para o desenvolvimento da atividade.

Figura 03: Atividade "Pense Rápido"



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

De acordo com Coll (2005), atividades que desafiam a cognição e incentivam a rápida tomada de decisões ajudam no desenvolvimento de habilidades de interpretação e raciocínio em alunos com DI. A dinâmica lúdica dessa atividade também contribuiu para o engajamento dos alunos, conforme Kishimoto (2011) ressalta que jogos pedagógicos são eficazes para melhorar o aprendizado em contextos inclusivos, uma vez que favorecem a motivação e a interação social.

Além disso, o caráter competitivo, mas colaborativo, da atividade reforçou a capacidade de resposta rápida dos alunos, conforme indicado por Capovilla (2002), que argumenta que o estímulo à competição saudável em ambientes educacionais inclusivos pode potencializar o desenvolvimento cognitivo e social.

Atividade 3: Quebra-cabeça do Alfabeto

A terceira atividade consistiu na montagem de um quebra-cabeça do alfabeto, no qual o aluno deveria organizar as letras na sequência correta. Inicialmente, ele avançou com facilidade, mas teve dificuldades para lembrar a ordem de algumas letras. A professora, então, utilizou dicas associativas, como mencionar nomes de animais que começavam com as letras esquecidas, facilitando a conclusão da tarefa.

Figura 03: Aluno realizando a atividade quebra-cabeça do alfabeto.



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Após a montagem do alfabeto, a professora revisou com o aluno a diferença entre vogais e consoantes, pedindo que ele desmontasse o quebra-cabeça e o refizesse, verbalizando cada letra ao longo do processo. As figuras 06 e 07 mostram o aluno na prática da atividade.

Figuras 06 e 07: Aluno na prática da montagem e desmontagem do quebra cabeça do alfabeto



Fonte: Acervos pessoal do autor, 2024.

Esse tipo de associação, mencionada por Behares (1993), é uma estratégia eficaz para auxiliar a memorização de conceitos básicos, como o alfabeto, em alunos com dificuldades cognitivas. Além disso, o uso de pistas verbais e a repetição da tarefa, onde o aluno desmontou e remontou o quebra-cabeça verbalizando as letras, está em consonância com Ferreira (2006), que defende a prática repetitiva e associativa como um método eficaz para reforçar a aprendizagem em alunos com DI. Finalizamos a atividade revisando com o aluno a diferença entre vogais e consoantes, o que reforçou o conteúdo, e estimulou a capacidade de verbalização e o desenvolvimento da linguagem.

5 AVALIAÇÃO DAS ATIVIDADES

Essa experiência revelou resultados positivos em diversas áreas do desenvolvimento do aluno. As atividades aplicadas: construção e travessia de um labirinto, o jogo "pense rápido" e o quebra-cabeça do alfabeto, foram planejadas para estimular as habilidades cognitivas e motoras, e conseguiram engajar o aluno. O uso de práticas lúdicas mostrou-se adequado para o aprendizado ativo, incentivando a participação do aluno em atividades e reforçando suas habilidades de comunicação, concentração e memória.

Na 01, houve notável progresso na concentração, coordenação motora e comunicação. O aluno mostrou grande empenho tanto na construção quanto na travessia, e os momentos de cooperação com os supervisores fortaleceram suas habilidades de interação social. A 02, proporcionou desenvolvimento na leitura e na interpretação, e estimulou o raciocínio rápido. O aluno demonstrou agilidade mental ao responder corretamente e rapidamente aos comandos. Por fim, a atividade 03, foi fundamental para fortalecer a memorização e verbalização das letras. Apesar das dificuldades enfrentadas em lembrar a sequência correta de algumas letras, o aluno mostrou superação com o uso de estratégias associativas oferecidas pela professora. A capacidade de desmontar e remontar o alfabeto, diferenciando vogais e consoantes, mostrou uma evolução clara na compreensão do conteúdo e no uso da linguagem.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir das avaliações obtidas nas atividades, pode-se concluir que a inclusão escolar de alunos com Deficiência Intelectual (DI) depende de práticas pedagógicas adaptadas às suas necessidades. As atividades psicopedagógicas lúdicas e interativas realizadas com o aluno promoveram o desenvolvimento de suas habilidades cognitivas, motoras e linguísticas, e fortaleceram sua autoconfiança.

As atividades realizadas reforçam a importância da socialização para o desenvolvimento de alunos com DI. A colaboração em atividades como a travessia do labirinto e o jogo "Pense Rápido" demonstram que, quando bem orientadas, essas práticas podem fortalecer a capacidade cognitiva dos alunos, e suas habilidades sociais. Por fim, os resultados da experiência confirmam que o sucesso da educação inclusiva requer um compromisso constante com a adaptação das práticas pedagógicas e o uso de metodologias que integrem os alunos em atividades interativas. A inclusão escolar deve ser entendida como um processo contínuo que valoriza as potencialidades dos alunos, permitindo-lhes participar ativamente do ambiente educacional e desenvolver habilidades para sua vida estudantil e social.

REFERÊNCIAS

- BEHARES, L. E. *Psicolinguística e pedagogia do texto: a língua e a linguagem no processo de ensino*. 2. ed. Montevideu: Montevideo Publicaciones, 1993.
- BRASIL. *Política Nacional de Educação Especial na perspectiva da educação inclusiva*. MEC/SEESP, 2008.
- CAPOVILLA, F. C. *Dicionário enciclopédico ilustrado trilingue da língua de sinais brasileira: a Libras no mundo digital*. 1. ed. São Paulo: Edusp, 2002.
- COLL, C. *Desenvolvimento psicológico e educação: necessidades educativas especiais e aprendizagem escolar*. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2005.
- FERREIRA, L. F. *Educação especial e inclusão escolar: fundamentos históricos e teóricos*. 3. ed. Campinas: Papirus, 2006.
- FONSECA, V. *Psicomotricidade: filogênese, ontogênese e retrogênese*. 5. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 2004.
- GESSINGER, R. *Inclusão escolar: possibilidades e limites*. 2. ed. Porto Alegre: Mediação, 2001.
- KISHIMOTO, T. M. *Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação*. 3. ed. São Paulo: Cortez, 2011.
- VIGOTSKI, L. S. *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes, 2003.
- VYGOTSKY, L. S. *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1997.

CONTEXTUALIZANDO O ENSINO DE MATEMÁTICA EM UM TORNEIO DE XADREZ

 Crossref  10.56238/livrosindi202535-004

Eduardo Santos de Sousa Lívia

E-mail: edusantos12558@gmail.com

Lívia Jânia de Matos Silva

E-mail: livia.silva@abaetetuba.ufpa.br

Reinaldo Feio Lima

E-mail: reinaldo.lima@ufpa.br

RESUMO

O presente trabalho visa relatar as experiências no estágio supervisionado II na perspectiva inclusiva na escola Pedro Teixeira na cidade de Abaetetuba, com uso de jogos de tabuleiros para exemplificar a matemática com modelos da realidade dentro do ramo da Educação Matemática. O objetivo da pesquisa é apresentar o recurso metodológico xadrez, de modo a compreender suas contribuições para o funcionamento do jogo e o conteúdo matemático. A metodologia foi de caráter qualitativa, pois busca evidenciar a relação da matemática buscando interrelacionar o objeto com conceitos matemáticos. Os resultados da aplicação do xadrez na matemática mostraram uma relação intrínseca com a disciplina, pois em ambos requer concentração, possibilidades e estratégias, bem como conhecimento de plano cartesianos, sistemas de coordenadas e a geometria. Conclui-se que, participar das atividades desenvolvidas permitiu instigar o uso da matemática com o xadrez, espera-se que com este relato possa ajudar na difusão de ideias ao relacionar o objeto e a matemática com estudos primários e secundários acerca de potencialidades ao uso de tabuleiros aos modelos matemáticos.

Palavras-chave: Xadrez, Educação Matemática, Plano Cartesiano.

1 INTRODUÇÃO

Diante do atual cenário educacional que estamos inseridos, com a variedade de perfis que compõe uma sala de aula, cria-se a necessidade de diversificação de abordagem para atender os alunos proporcionando intervenções oportunas e personalizadas, para uma das alternativas didáticas de metodologias ativas são o uso e criação de jogos. Para o uso de jogos Kishimoto (1996) versa que a ser aplicados como ferramenta pedagógica, jogos são elementos estimuladores do desenvolvimento, se tornando um elemento de ensino que possibilita colocar em ação um pensamento que rumo para uma estrutura nova.

Jogos de tabuleiro estão presentes em diversas escolas, contando muita das vezes com clubes para os jogos, e o jogo de Xadrez está inserido a essa realidade. A origem do jogo, os historiadores não conseguiram chegar a um consenso, pois existem poucos registros para sustentar a história, o que dificulta uma afirmação sobre onde realmente o jogo foi inventado (D'AGOSTINI, 2002).

No jogo é dividido por dois jogadores, cada um detém dezesseis peças, cada jogador começa o jogo com: oito peças chamadas de Peão, duas peças chamadas de Torre, duas peças chamadas de Cavalos, duas peças chamadas Bispo, uma peça chamada rainha e uma peça chamada rei. De acordo com D'Agostini (2002, p. 17)

O xadrez é um esporte intelectual, que se joga entre duas pessoas, ou equipes, que dispõem de forças iguais, seja em quantidade seja em qualidade, denominadas peças e que têm cor diferente, geralmente brancas e pretas. As peças se movimentam segundo leis convencionais, e o jogo tem motivo de, após um número variável de movimentos, também chamados lances ou jogadas, ganhar a partida ao adversário, o que se consegue levando o rei contrário (o Rei, saibamos, é a peça mais importante do xadrez) a uma posição especial, a que se denomina mate. O objetivo, portanto, do jogo de xadrez é dar mate ao adversário. E o jogador que consegue primeiro dar mate a seu rival é quem vence a partida.

Dentro do jogo de xadrez, a matemática se mostra entrelaçada, sua estrutura contando com um tabuleiro constituído de quadrados dispostos em um formato 8x8 totalizando sessenta e quatro casas que se alternam entre duas cores (uma clara e outra escura). A aproximação entre o xadrez e a matemática é notável, pois ambos envolvem pensamento lógico, resolução de problemas e estratégias abstratas. De acordo com Lima

Tanto a Matemática como o Xadrez têm no cálculo uma importante ferramenta. Evidentemente, o cálculo, por si só, não conduz a uma solução, fazendo-se necessário estabelecer as valorações que indiquem o caminho capaz de conduzir às soluções necessárias e/ou desejadas. No Xadrez, o cálculo apresenta-se como a capacidade de visualizar tanto as suas jogadas, como as do adversário, elaborando uma árvore mental composta por vários galhos e/ou ramificações em um mesmo tronco (Lima et al., 2021, p.5)

Assim, objetivamos apresentar o recurso metodológico xadrez, de modo a compreender suas contribuições para o funcionamento do jogo e o conteúdo matemático. O presente artigo está dividido em Introdução, Fundamentação teórica, procedimentos metodológicos, resultados e discussões e conclusão, onde apresenta-se um relato de experiência.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O uso de materiais alternativos dentro de sala de aula possibilita aos alunos e professor a experiência de práticas que contextualize os conceitos provocando-os a entender onde tais conceitos podem agregar no cotidiano, Lorenzato (2008) corrobora com esse panorama de que o é papel do professor adotar uma metodologia de ensino variada, auxiliando para os obstáculos dos alunos, buscando estratégias que a torne o mais acessível para os estudantes.

A partir desta perspectiva, a atividade foi direcionada para o xadrez, que contou como um instrumento dos quais os alunos já estavam habituados, e a partir dele foi construído um modelo

matemático para a ferramenta já conhecida pelos estudantes, de acordo com Burak (1992), a escolha do tema que vai gerar a construção de um modelo matemático deve ser construído a partir das designações dos alunos.

O xadrez é um jogo que está presente na sociedade durante muitos séculos, é considerado uma ferramenta para ajudar pessoas com dificuldades de socialização, requer interação entre os jogadores e desenvolve o raciocínio em diversas combinações e possibilidades.

Considerado o segundo esporte mais praticado no mundo, ficando atrás apenas do futebol. Tem o poder de estimular a imaginação contribuindo para o desenvolvimento da memória e da capacidade de concentração, bem como, da velocidade de raciocínio. O xadrez ainda tem o poder de promover a socialização entre as pessoas, é um esporte que ensina o jogador a aceitar a vitória e ou a derrota de modo que este se visualize não como sinônimo de sucesso e ou de fracasso (Santos; Melo, 2015, p. 66).

Na matemática, o jogo de xadrez pode ser utilizado de acordo com a estratégia do professor, e possibilita a abordagem de diversos assuntos, dentre eles o sistema de coordenadas cartesiana

Existe ainda uma estreita relação com alguns conteúdos curriculares presentes na matemática. A primeira relação pode ser vista no próprio tabuleiro no qual se joga xadrez e o sistema utilizado de anotação de uma partida, que dá nome a cada uma das casas através da utilização de coordenadas cartesianas. O eixo y equivale à numeração das filas (oito no total), enquanto o eixo x equivale às colunas, que vão de "a" a "h". O ponto de convergência entre os eixos x e y dá nome a uma casa como, por exemplo, as casas e2, d6, etc. (Oliveira; Castilho, 2006, p. 02).

Desta forma, a abordagem utiliza deste jogo já conhecido pelos alunos para praticar e formular uma aula de matemática, ressaltando a importância do incentivo e a valorização dos jogos de tabuleiro e suas potencialidades para a Educação Matemática.

3 METODOLOGIA

A abordagem sucedeu uma pesquisa qualitativa de acordo com Gil (2010, p. 58), “não está ligado às especificidades numéricas, ou seja, a dados de cunho estatísticos, mas à compreensão de algum fenômeno”, do tipo estudo de caso, fazendo do instrumento de produção de dados: observação participante (Pinho, 2020), a partir de um torneio de Xadrez que ocorreu na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Pedro Texeira no município de Abaetetuba Pará, contando com nove alunos do sexto, nono e primeiro ano.

O torneio teve duração de 90 minutos e contou com três etapas, a primeira etapa foi o ensino dos conceitos matemáticos, a segunda etapa que consistiu em perguntas aos alunos sobre os assuntos anteriormente, e a terceira etapa finalizamos com o torneio de xadrez. Para esta atividade foi utilizado: quadro branco, pincel, quatro tabuleiros de jogo de xadrez e suas dezesseis peças com riscos alternados dentre o plano para simular as casas claras e as escuras.

3.1 AÇÃO-REFLEXÃO-ÇÃO NA EXPERIÊNCIA

A escola conta com o projeto xadrez desenvolvido com o Coletivo Dos Enxadristas, supervisionado pelo professor Marcelo Augusto Loureiro Silva contando com alunos do 6º e 9º ano dos anos iniciais e 1º do ensino médio. A temática emergiu a partir de uma proposta do professor, e iniciou as buscas por quais assuntos seriam tratados e os métodos de ensino da interseção entre Xadrez e Matemática.

Identificamos conceitos de sistema de coordenadas cartesianas, números exponenciais e geometria plana. A partir disso, foi montado no quadro um plano cartesiano onde no eixo X as coordenadas A até H, e no eixo Y as coordenadas 1 a 8, dispostas no intuito de simular o tabuleiro de xadrez de acordo com os autores Oliveira e Castilho (2006).

Após os preparativos, ocorreu a aplicação da proposta, nesta etapa os domínios de conteúdo se encontravam em divergência, pois alguns sabiam dos assuntos e outros não. Assim, se optou por fazer a apresentação explicando cada conceito de reta e ponto, e como formar as casas do xadrez, concluindo que, no presente plano cartesiano, 4 pontos formavam um quadrado onde foi inserido letras e representação das peças, para o peão foi inserida a letra (P), a torre foi (T), o cavalo foi (C), o bispo a letra (B), a rainha foi (Ra) e o rei foi a letra (R). Por fim, a organização se estabeleceu de acordo com a imagem a seguir.

Figura 1: Foto do quadro apresentado no torneio de xadrez para os estudantes da escola Pedro Texeira na sala do Atendimento Educacional Especializado.



Fonte: acervo pessoal do autor.

Em seguida, o torneio iniciava com quatro duplas jogando, a cada vitória se acumulava 2 pontos para o ganhador da partida, em caso de empate resultava em 1 ponto para cada integrante, em caso de derrota o participante não ganhava ponto, caso o aluno não participasse de nenhum dos 4 jogos acumulava 1 ponto, demonstrando assim um sistema de soma, onde a matemática mais uma vez foi necessária.

Figura 2 – Realização do Torneio de Xadrez na escola Pedro Texeira ano letivo de 2024.



Fonte: acervo pessoal do autor.

4 ANÁLISE DE DADOS

Observou-se que o xadrez tem grande atribuições no ensino e na aprendizagem, já que o xadrez trabalha o raciocínio lógico, estimulando os alunos a preverem consequências e a tomarem decisões de maneira mais consciente e calculada, e corroborou para o exercício da socialização, ratificando a Santos e Melo (2015).

Na matemática o xadrez fortalece o pensamento abstrato e a resolução de problemas, pois os jogadores devem avaliar diferentes variáveis antes de executar um movimento. A análise de posições no tabuleiro e a antecipação de jogadas futuras treinam o cérebro para lidar com situações complexas, e a visualização do plano cartesiano, mostrando suas relações de acordo com Oliveira e Castilho (2006) dialogando com Sérgio Lorenzato, no que diz o autor:

A construção do material didático, muitas vezes, é uma oportunidade de aprendizagem. Em sala de aula, é preciso oferecer inúmeras e adequadas oportunidades para que as crianças experimentem, observem, criem, reflitam e verbalizem. As atividades devem ser escolhidas considerando não somente o interesse das crianças, mas também suas necessidades e o estágio de desenvolvimento cognitivo em que se encontram. O professor deve observar atentamente seus alunos, ora com a intenção de verificar se é preciso intervir, no sentido de orientar, ora com a intenção de avaliar seus progressos, [...] (LORENZATO, 2008, p. 20-21)

Observamos que esta atividade trouxe novos olhares para um tema já abordado com os alunos, e seus saberes foram fundamentais para a realização da dinâmica Burak (1992). Portanto, salientamos a importância de aproximação e valorização da realidade dos alunos e seus conhecimentos para realização de uma aula construtiva e ativa, onde por intermédio do professor exista a aproximação dos jogos de seus componentes curriculares.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No torneio de xadrez realizado na Escola Pedro Teixeira, os estudantes não apenas demonstraram suas habilidades no jogo, mas também aplicaram conceitos de matemática aprendidos em sala de aula, como o uso do plano cartesiano e suas coordenadas. Dessa forma, concluímos que o ensino de matemática e a prática do xadrez vem destacando como o raciocínio lógico e a visualização espacial se conectam entre essas duas áreas do conhecimento.

A experiência deste na matemática foi enriquecedora e buscou explicitar a aplicação de jogos de tabuleiros, em específico o jogo de xadrez para abordar conteúdo, a partir de um torneio realizado pelo projeto nomeado de Clube de Xadrez Pedro Texeira. Assim, espera-se que este relato possa colaborar na difusão de ideias acerca de jogos voltados ou adaptados para o ensino da matemática, e as potencialidades do jogo de Xadrez para novos estudos primários e secundários devem ser desenvolvidos abordando novos assuntos de matemática com jogos de tabuleiros que podem ser modelos de uso matemático.

REFERÊNCIAS

- BURAK, Dionísio. *Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem*. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- D’AGOSTINI, O. G. *Xadrez básico*. 5. ed. rev. Rio de Janeiro: Ediouro, 2002.
- DE MENEZES PINHO, Lidia Maria. Introdução a elementos de pesquisa qualitativa: explorando o estudo de caso, a observação participante e as análises de resultados. *Revista Fragmentos de Cultura: Revista Interdisciplinar de Ciências Humanas*, v. 30, n. 4, p. 758-768, 2020.
- GIL, Antonio Carlos. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.
- KISHIMOTO, Tizuko Morchida. *Brincadeira e educação*. São Paulo: Cortez, 1996.
- LIMA, Thiago Amaral Melo et al. O jogo de xadrez e a educação matemática: limites e possibilidades. *RECIMA21: Revista Científica Multidisciplinar*, v. 2, n. 5, p. e25340, 2021.
- LORENZATO, Sérgio. *Para aprender matemática*. 2. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2008. (Coleção Formação de Professores).
- LORENZATO, Sérgio. *Educação infantil e percepção matemática*. 2. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2008. (Coleção Formação de Professores).
- OLIVEIRA, C. A. S.; CASTILHO, J. E. O xadrez como ferramenta pedagógica complementar na educação matemática. Disponível em: <http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22006/CleberAlexandreSoaresdeOliveira.pdf>. Acesso em: 20 out. 2024.
- SANTOS, A. M.; MELO, A. S. A. S. Os benefícios do xadrez como ferramenta pedagógica complementar no processo de ensino-aprendizagem do Centro Educacional e Vivência. *Revista Educação*, v. 8, p. 63-69, 2015.

MATEMÁTICA NAS MÃOS: INCLUSÃO POR MEIO DO USO DE TECNOLOGIAS ASSISTIVAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA PARA ESTUDANTES SURDOS

  10.56238/livrosindi202535-005

Josué Moraes Maia

E-mail: josue.maia@abaetetuba.ufpa.br

Reinaldo Feio Lima

E-mail: reinaldo.lima@ufpa.br

Richr da Silva Marques

E-mail: marquesjjrichr@gmail.com

Suellen Cristina Queiroz Arruda

E-mail: scq.arruda@ufpa.br

RESUMO

O presente trabalho apresenta um recurso inovador e inclusivo voltado para o ensino das disciplinas de Matemática para alunos surdos, incorporando vídeos explicativos sobre determinados assuntos em LIBRAS com legendas, com o objetivo de facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos, auxiliando os intérpretes e professores na transmissão de conteúdos. Reconhecendo os desafios enfrentados pelos educadores em relação as simbologias específicas da Matemática, criando um ambiente de aprendizado mais acessível e efetivo.

Palavras-chave: Tecnologias assistivas, Libras, Geometria.

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, as discussões acerca da inclusão no contexto educacional e o modo que a mesma pode ser aplicada vem ganhando grande destaque em pesquisas científicas, revistas e nas mídias de forma geral. Entretanto, será que a inclusão está sendo realmente desempenhada nas instituições de ensino público? Desde 1994, com a assinatura da Declaração de Salamanca, diretrizes mundiais são estabelecidas para garantir às pessoas com deficiência o acesso à educação, interação social e meios que possibilite o seu desenvolvimento, assim esse cenário é intensificado em 2015, com a aprovação da Lei de nº 13.146, o Brasil instituiu o Estatuto da Pessoa com Deficiência, com o objetivo de assegurar e promover, em condições de igualdade, o exercício dos direitos e das liberdades fundamentais para a pessoa com deficiência, visando à sua inclusão social, desenvolvimento educacional e cidadania.

No que se refere à educação no ensino superior, a Lei 13.409/2016 obriga o poder público a garantir às pessoas com deficiência a participação na política de cotas de modo a assegurar o acesso à educação superior e à educação profissional permitindo seu ingresso e a segurança de

seus direitos no local de educação de ensino superior. Nesse sentido, com a implementação destas regulamentações mencionadas, cresceu exponencialmente o número de alunos com necessidades educacionais específicas em diferentes níveis de ensino, tornando imprescindível mudanças nas ações pedagógicas utilizadas pelo docente e profissional especializado na perspectiva da inclusão, além de desenvolver meio de superar barreiras sociais ainda observadas na educação, como defende Moreira e Manrique (2019, p.17), quando afirmam que:

Na última década, as políticas inclusivas que garantem a permanência de estudantes com NEE no ensino superior ganharam destaque, principalmente se observar que distintas universidades brasileiras redefiniram seus espaços e criaram núcleos de apoio e acompanhamento a esses alunos. Porém, a capacidade de minimizar barreiras que impedem ou restringem o acesso e a permanência de pessoas com deficiência na universidade ainda é bastante tímida, principalmente quando olhamos os investimentos voltados à formação dos professores, à infraestrutura e à elaboração de materiais pedagógicos adequados.

Diante disto, se faz necessário a democratização dos espaços e suas práticas nas mesmas, permitindo o acolhimento e a interação de novos grupos sociais, reavaliação não somente o processo pedagógico adotado pela instituição e pelo corpo docente, bem como, observar os meios de acessibilidade estruturais e ferramentas de apoio pedagógico que sejam disponíveis aos profissionais. Para além, no que se refere aos profissionais (professores e apoio técnico) como o Profissional de Apoio Escolar-PAE que atuam diretamente com este público em todos os níveis de ensino, necessitam desempenhar um novo olhar sobre os processos de ensinar e aprender com o uso de novos meios tecnológicos assistivos. Para tanto, é essencial que instituições de ensino disponham de estrutura física e pedagógica para viabilizar o processo de ensino- aprendizagem, possibilitando reflexões da prática docente para lidar com alunos com necessidades educacionais específicas.

Nesse sentido, o uso de ferramentas tecnológicas assistivas se transformam em grandes aliados, uma vez que são utilizados de forma adequada em sala de aula pelo professor como sendo um mediador entre a tecnologia e o incentivo educacional que alunos com necessidades educacionais necessitam. Assim, no momento educacional e na era digital que nos encontramos, pensar que a tecnologia e o desenvolvimento estudantil são opostas já não faz sentido, como defende Menezes (2006, p.20),

Com o passar do tempo, por meio de estudos, leituras e discussões, vivências e trocas, tornamo-nos capazes de entender a magia, o encanto e o fascínio que constituem a relação aluno-computador. Alicerçadas nesses conhecimentos, passamos a acreditar que quando falamos em processos de aprendizagem de alunos com NEEs, estabelecendo uma relação com a informática, devemos obrigatoriamente entender como essa tecnologia é absorvida pelas redes de ensino e, especialmente, pelos professores enquanto agentes indispensáveis nesse processo.

Portanto, o presente trabalho baseia-se na construção de estratégias de ensino na perspectiva da inclusão voltada ao uso de programas e plataformas digitais que viabilizem a criação de material didático para o ensino de Geometria a alunos surdos das escolas públicas do município de Abaetetuba-PA e regiões do baixo-Tocantins, a fim de contribuir efetivamente com os professores de Matemática, intérpretes da Língua de Sinais, PAE (Profissional de Apoio Escolar) e professores do AEE (Atendimento Educacional Especializado) na disseminação da Língua de Sinais Brasileira, além de promover melhor interação entre professor, aluno e intérprete, propiciando um espaço educacional adequado para o desenvolvimento estudantil do aluno surdo ou deficiência auditiva.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

No âmbito ainda sobre a implementação de tecnologias assistivas em 2015, o Brasil avançou com a promulgação da Lei nº 13.146, que visou instituir o Estatuto da Pessoa com Deficiência. Assegurando direitos e liberdades fundamentais e principalmente promovendo a inclusão social e o desenvolvimento educacional de pessoas com deficiência (BRASIL, 2015). A legislação reforça a necessidade de condições de equidade ao acesso à educação, chegando desde a educação básica até o ensino superior. A Lei 13.409/2016, garante a participação de pessoas deficientes na política de cotas para a Educação Superior, o que representa um avanço significativo para a inclusão deste grupo no ambiente acadêmico (BRASIL, 2016). Embora as políticas inclusivas tenham avançado, conforme mostra Moreira e Manrique (2019), ainda existem barreiras que limitam a acessibilidade e permanência de estudantes com necessidades educacionais específicas no ensino superior. A falta de investimentos em formação de professores, infraestrutura adequada e materiais pedagógicos acessíveis.

A integração de tecnologias assistivas às práticas pedagógicas, podem servir como potencial aliado no processo de ensino e de aprendizagem. Menezes destaca que na era atual, é fundamental que a tecnologia não seja vista como um obstáculo para o aprendizado, mas sim como um recurso enriquecedor que potencializa a Educação (MENEZES, 2020). Ao adotar uma abordagem que visa valorizar a inclusão e o uso de tecnologias, as instituições de nível básico ao superior podem promover um ambiente mais acolhedor e suscetível ao aprendizado de todos os alunos, independentemente de suas habilidades.

Dessa forma, a ampliação do saber pedagógico acontece, fazendo uso de novas ferramentas educacionais e promovendo um ambiente mais versáteis de acordo com o saber que cada aluno carrega. Nesse sentido, Menezes destaca que essa tecnologia a ser utilizada deve ir de acordo com os princípios escolares, aos objetivos do professor em sala de aula e da mesma forma

aos do aluno; que por sua vez irá ampliar o desenvolvimento de uma nova forma de ensinar e, isso possibilita aos alunos novas formas de aprender (MENEZES, 2006).

3 METODOLOGIA

A metodologia utilizada na criação deste trabalho baseia-se no processo de investigação e coleta de dados para a finalidade de uma produção, com o propósito de auxiliar profissionais da educação que atuam diretamente e indiretamente com alunos da comunidade surda em geral do baixo-Tocantins.

No primeiro momento, a proposta do aplicativo se deu pela observação da falta de um material de consulta de libras na comunidade surda de Abaetetuba-PA, gerando algumas dificuldades entre intérpretes e surdos quando se trata do desenvolvimento matemático em sala de aula, já que os sinais matemáticos em libras muitas vezes são desconhecidos. Assim, foi observado por meio do levantamento bibliográfico e de um questionário aplicado para intérpretes de LIBRAS sobre suas dificuldades encontradas no repasse de assuntos matemáticos que os alunos com surdez possuem em sala de aula, além da falta de materiais e formação continuada para este profissionais, essa dificuldade se intensifica uma vez que o intérprete de LIBRAS não possuem formação matemática adequada para exemplificar e repassar o conteúdo de maneira mais apropriada, já que este realiza a mediação entre o professor de Matemática da sala de aula regular e o aluno surdo, não sendo lhe permitido intervir de maneira mais direta sobre aquilo que o professor regente está aplicando.

Assim, essas dificuldades foram analisadas e pensadas em como poderiam ser solucionadas, a partir disso foi feita a catalogação de sinais matemáticos utilizados pela comunidade surda e de como este material chegaria com extrema facilidade nas mãos dos intérpretes de libras como ferramenta usual e de fácil acesso. De forma, o uso da tecnologia assistiva se fez necessária, já que a interação entre celular e o ser humano vem crescendo e fazer uso dessa ferramenta tecnológica se torna fundamental no processo educacional de alunos surdos.

Após a catalogação, foi realizada a filtragem e edição dos materiais para que as relações entre todos os reforços visuais fossem utilizadas para a aquisição da informação, tais reforços utilizados foram: descrição do sinal matemático, legenda em português, vídeo em libras, aplicação do sinal proposto e a utilização de imagens ilustrativas para que eles sejam entendidos. Contudo, podemos afirmar que este material de apoio educacional é válido para além da utilização em sala de aula por intérpretes de libras, mas podendo também ser utilizados por alunos surdos, alunos ouvintes, professores de matemática e corpo docente da instituição e toda a comunidade em favor de um processo educacionais mais inclusivo.

Imagem 1: Interface do APP Matemática nas Mãos.



Fonte: Acervo pessoal, (2024).

Imagem 2: Aba de aulas sobre Geometria Espacial.



Fonte: Acervo pessoal, (2024).

Imagem 3: Vinheta e aula expositiva no APP.



Fonte: Acervo pessoal, (2024).

Nesse sentido, é observado acima que o aplicativo apresentado vem com uma proposta inovadora no sentido de trazer mais acessibilidade nas instituições do baixo Tocantins, atendendo toda a comunidade surda existente, além de propiciar melhores ferramentas para o auxílio de intérpretes de LIBRAS educacionais e professores da rede pública de ensino da sala de aula regular que atuam diretamente com alunos surdos, permitindo espaços mais acessíveis e inclusivos.

4 ANÁLISE DE DADOS

A seção apresentará os dados produzidos e discute os resultados com base na análise de reflexões e aprendizagens dos participantes e/ou dos autores acerca da prática realizada por intermédio da utilização do aplicativo em sala de aula.

Nesse intuito, desenvolvemos o aplicativo denominado Matemática nas Mãos, onde conseguimos fornecer vídeos explicativos cada assunto de Matemática de maneira inclusiva, em LIBRAS, auxiliando tanto intérpretes como professores de qualquer nível de ensino, sobre os diferentes sinais que a matemática abrange, além do auxílio em sinais diversos da comunidade surda do baixo Tocantins. Nesse sentido, pretendemos ter como resultados maiores melhorias de aprendizagem e versatilidade no processo de ensino de surdos em escolas regulares.

Vale ressaltar que o aplicativo é apenas um demo, isso quer dizer que é apenas um protótipo em desenvolvimento e que está sendo aperfeiçoado e alimentado, mas logo ele estará disponível para todos os públicos. A partir disso, nossa análise de dados se dará por meio de formulário implementado no meio acadêmico e docente, visando coletar dados sobre as dificuldades dos intérpretes, professores e alunos sobre o ensino de Matemática para alunos surdos e consequentemente sua melhora a partir do uso do aplicativo “Matemática nas mãos”. Assim nasceu a ideia da criação de um app que atendesse esse público, objetivando potencializar o ensino e aprendizagem de todos com equidade.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O aplicativo “Matemática nas Mãos” representa uma iniciativa integradora e inovadora voltada para a inclusão de alunos surdos no ensino das disciplinas de Matemática. Fornecendo vídeos explicativos em LIBRAS e legenda, buscando não apenas auxiliar os alunos no aprendizado dos conceitos e formas matemáticas, mas também oferecer suporte a intérpretes de LIBRAS e professores. A criação dessa estratégia é fundamental, já que muitos educadores enfrentam desafios na transmissão de conteúdos matemáticos para alunos surdos, especialmente no que tange à terminologia específica e aos diferentes sinais utilizados. Ao abordar essas adversidades, o aplicativo se propõe a criar um ambiente de aprendizado mais acessível e facilitado.

Outrossim, é importante destacar que o aplicativo esteja em suas etapas iniciais como *demo*, mas já demonstrando compromisso com a melhoria contínua e a adaptação às necessidades dos usuários. O uso de formulários para coletar dados sobre as dificuldades enfrentadas por intérpretes, professores e alunos mostra de maneira explícita uma abordagem metodológica sólida e centrada. Essa análise é fundamental para garantir que o aplicativo não apenas cumpra seu propósito, mas também se torne uma ferramenta realmente útil para seus usuários.

Em suma, a proposta do aplicativo “Matemática nas Mãos” se alinha aos princípios e leis da Educação Inclusiva, promovendo equidade no ensino das disciplinas de Matemática para alunos surdos. Ao potencializar o ensino e a aprendizagem por meio de recursos tecnológicos, beneficiando não apenas os alunos, mas também professores e intérpretes. A continuidade de sua programação e a implementação de melhorias, visamos que essa ferramenta possa ser amplamente utilizada nas escolas ou qualquer outro meio, contribuindo para uma Educação mais justa e eficaz para todos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. *Lei nº 13.409, de 28 de dezembro de 2016*. Dispõe sobre a política de cotas para pessoas com deficiência. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 2016.

MENEZES, E. C. P. *Informática e educação inclusiva: discutindo limites e possibilidades*. Santa Maria: Editora da UFSM, 2006.

MENEZES, M. Inclusão e tecnologia assistiva: desafios e oportunidades no ensino contemporâneo. *Revista de Educação Inclusiva*, 2020.

MOREIRA, A.; MANRIQUE, M. Políticas educacionais e permanência de estudantes com necessidades educacionais especiais na universidade. *Educação e Pesquisa*, 2019.

UNESCO. *Declaração de Salamanca e linhas de ação sobre as necessidades educativas especiais*. Salamanca: UNESCO, 1994.

NÚMEROS NATURAIS: UMA COMPREENSÃO DA HISTÓRIA E A TRANSPOSIÇÃO EM LIVROS ESCOLARES

  10.56238/livrosindi202535-006

Celton Rodrigues Ferreira

E-mail: celton.rodrigues@cameta.ufpa.br

Maicon de Oliveira Bacha

E-mail: maicon.bacha@cameta.ufpa.br

Denivaldo Pantoja da Silva

E-mail: denivaldo@ufpa.br

RESUMO

Este trabalho é parte de uma investigação sobre a epistemologia histórica dos números naturais e a transposição didática para os textos escolares. Tem como objetivo compreender a epistemologia histórica dos Números naturais e analisar alguns aspectos da transposição didática presente nos livros escolares. Para tanto, recorreremos à pesquisa bibliográfica em referenciais teóricos da historiografia da Matemática, tendo em vista os pressupostos teórico-metodológicos da abordagem epistemológica histórica articulada com noções da Teoria da Antropológica do Didático. Os resultados apontam lacunas de ordem epistemológicas na construção do texto do saber em livros escolares.

Palavras-chave: Números naturais, História da matemática, Transposição didática, Livros didáticos, Ensino de matemática.

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho é parte de uma investigação sobre a origem, epistemologia e transposição didática dos Números naturais presentes nos manuais escolares. Tem como objetivo compreender a epistemologia histórica dos Números naturais e analisar alguns aspectos da transposição didática presente nos livros escolares recomendados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), responsável pela avaliação e disponibilização de obras e outros materiais didáticos para as escolas brasileiras, como instrumento essencial nas práticas docentes

No entanto, conferir significado a objetos de ensino no âmbito escolar parece não ser uma tarefa elementar para o professor de Matemática. Uma possibilidade seria estar sempre em busca de novas alternativas metodológicas. Nesse caso, a História da Matemática como área de conhecimento investigativa e metodológica pode ser uma opção interessante pois, “pode nos dar uma nova perspectiva sobre o ensino. [...] nos permite [...] compreender melhor a natureza do conhecimento matemático e de encontrar, dentro de sua estrutura histórica novas possibilidades de ensino” (Radford, 2011, p.44).

Aliás, concordamos que ao tratar da construção do conhecimento matemático, a história pode propiciar seguramente o aparecimento de novas maneiras de organizar e articular o conhecimento matemático para uso em sala de aula. Para além disso, segundo Radford (2011) “os resultados de uma investigação epistemológica didático- histórica, podem indicar novos caminhos de pesquisa didática e fornecer uma compreensão conceitual profunda dos objetos matemáticos presente nos currículos atuais.

Deste modo centramos nossa atenção no processo histórico-epistemológico dos Números naturais e para analisar o fenômeno de transposição didática presente no texto de saber (Chevallard, 2005) de livros escolares recomendados pelo PNLD (2022- 2026), especificamente, consideramos a historicidade do objeto de conhecimento em questão para analisarmos alguns aspectos da transposição didática nos manuais escolares. Para mostrar a epistemologia histórica dos números, optamos por recorrer inicialmente à construção de uma linha do tempo composta por marcos históricos desde sua origem passando pelas civilizações que foram berço para o desenvolvimento desse importante objeto de conhecimento escolar até os dias atuais. No entanto, é importante ressaltar que não se trata de identificar obstáculos na história para responder a possíveis novos questionamentos sobre os Números Naturais como fez Schubring (2018) com os números negativos, e sim tentar entender como surgiram em certa época e cultura para servir de base à análise de alguns aspectos da transposição didática situada nos livros escolares.

Deste modo, uma questão parece ser pertinente: Como compreender a epistemologia histórica dos números naturais e a transposição para os livros escolares? Partimos da hipótese de que a reconstrução histórica do objeto matemático de ensino seguramente pode encaminhar análises de texto do saber coerente com a origem epistemológica o mais próximo do real do objeto de ensino.

Nesse sentido, o presente artigo estará organizado em cinco tópicos. No primeiro a introdução apresentará a contextualização, objetivo e justificativa e o problema a ser abordado no trabalho, no segundo o referencial teórico adotado de forma articulado entre a abordagem Epistemológica Histórica e a Teoria Antropológica do Didático, o terceiro tópico a metodologia que mostrará os caminhos traçados para a elaboração do trabalho, o quarto abordará as análises por fim as considerações finais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Na tentativa de atender compor um referencial consistente e promover uma articulação entre História da Matemática e a Teoria Antropológica do Didático, este trabalho está fundamentado em referenciais teóricos da historiografia da Matemática descrita em Boyer (1974), Eves (1994) e Roque (2012) e no âmbito da Didática da Matemática, especificamente na

Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 2005) e Almouloud (2017).

A Didática da Matemática se desenvolveu na França a partir dos anos de 1970, onde, de acordo com Almouloud (2017), o sucesso das teorias psicológicas sobre o desenvolvimento da inteligência e a aquisição de conceitos fundamentais, focou primeiramente nos problemas de ensino de conceitos matemáticos em razão das exigências próprias ao saber matemático. Nesse sentido, recorreu à análise epistemológica e histórica.

De acordo com Almouloud (2017) o avanço das pesquisas em Didática da Matemática conduziu a constituição de uma área científica para investigar os processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos. Partindo desse princípio, é definida como sendo a ciência da educação cujo propósito é o estudo de fenômenos de ensino e de aprendizagem, mais especificamente, é o estudo de situações que visam à aquisição de conhecimentos/saberes matemáticos pelos alunos ou adultos em formação, tanto do ponto de vista das características dessas situações, bem como do tipo de aprendizagem que elas possibilitam.

Desse modo, novas teorias foram se constituindo nesse campo, dentre elas a Teoria Antropológica do Didático desenvolvida por Chevallard (1999). Esta teoria é uma contribuição importante para a Didática da Matemática, pois além de ser uma evolução do conceito de transposição didática, inserindo a didática no campo da antropologia, focaliza o estudo das organizações praxeológicas didáticas pensadas para o ensino e a aprendizagem de organizações matemáticas.

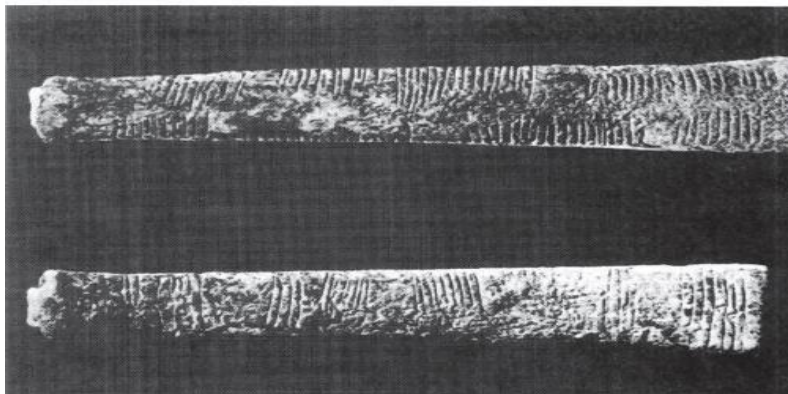
Para Chevallard (2002) citado por Almouloud (2017), constantemente, em uma determinada instituição I surgem novas praxeologias que poderão ser produzidas ou reproduzidas se existem em alguma instituição I'. A passagem da praxeologia da instituição I para a da instituição I' é chamada por Chevallard (2002) de Transposição, mais especificamente, de Transposição Didática quando a instituição de destino é uma instituição de ensino. Mais especificamente, a transposição didática está relacionada às adaptações que o saber a ensinar passa até se tornar objeto de ensino, isto é, “o trabalho que transforma de um objeto de saber a ensinar em um objeto de ensino Chevallard (2005, p.45, tradução nossa).

Sendo assim, a historiografia da Matemática torna-se um componente essencial para este trabalho em articulação com a Didática da Matemática onde está situada a Teoria Antropológica do Didático. Consideramos os autores Boyer (1974), Eves (1994) e Roque (2012), com o propósito de compreender a epistemologia dos Números naturais a qual apoiará nossa análise dos aspectos da transposição didática para os livros escolares. Portanto, a imersão na cronologia histórica certamente ajudará a compreender as transformações e adaptações ocorridas ao longo do tempo até chegar ao texto de saber.

2.1 A ORIGEM DOS NÚMEROS

Primeiramente consideramos necessário entender o processo de surgimento dos números para então compreendermos a cronologia do processo evolutivo até os dias atuais. Segundo Boyer (1974) e Roque (2012), os números tiveram sua origem em diversas sociedades como na Babilônia (Séculos XX a VI a.C.), Egito (Séculos III a I milênio a.C.), China (século III milênio a.C.), Índia (século III milênio a.C.), Arabia (A partir do século VII d.C.) e outros períodos da trajetória da humanidade.

Figura 1: Duas vistas do osso Ishango, com mais de 8000 anos de idade



Fonte: Eves (1994)

Segundo Eves (1994), a figura anterior mostra o **Oso de Ishango**, um artefato arqueológico de importante para a História da Matemática. Foi encontrado na década de 1950 nas margens do lago Edward, no Congo, este osso de babuíno possui entalhes que, por outros autores, são interpretados como uma das primeiras evidências de um sistema numérico.

Para Boyer (1974), Eves (1994) e Roque (2012), os números surgiram de um extenso processo de desenvolvimento social. As primeiras formas de contagem podem ser identificadas por meio de marcas em ossos e pedras conforme apresentados na figura 1, progredindo para sistemas numéricos mais elaborados nas civilizações antigas da Mesopotâmia e do Egito.

Esses autores destacam ainda outro fator importante: a criação do zero como um marco na trajetória dos números creditada aos antigos estudiosos indianos. Essa ideia inovadora da criação do zero possibilitou o surgimento de um sistema de valor posicional, fundamental para a Matemática que utilizamos, o sistema de numeração indo-arábico, que se transformou na fundação para a Matemática contemporânea.

Para Roque (2012):

Normalmente, associa-se a história dos números à necessidade de contagem, relacionada a problemas de subsistência, e o exemplo mais frequente é o de pastores de ovelhas que teriam sentido a necessidade de controlar o rebanho por meio da associação de cada animal a uma pedra (Roque, 2012, p. 31).

Como assegura Eves (1994, p. 26), as primeiras técnicas de contagem podem ter usado um sistema de notação básico fundamentado na correspondência um a um. Por exemplo, ao contar ovelhas, uma pessoa pode dobrar um dedo para cada ovelha. Outras formas de contagem incluem marcar no chão ou nas pedras, marcar na madeira ou dar nós na corda. Mais tarde, foram criados sons específicos para contar verbalmente pequenas quantidades de itens. Destaca ainda que com o passar do tempo e o desenvolvimento da escrita, surgiram símbolos específicos para representar números.

2.2 A ORIGEM DOS NÚMEROS NA BABILÔNIA E EGITO

De acordo com Roque (2012) a respeito da origem dos números, não se sabe ao certo o local preciso ou a civilização que foi o berço do surgimento de tal origem. “As fontes para o estudo das civilizações antigas são escassas e fragmentadas.” (Roque, 2012, p. 31).

Acreditamos que para um entendimento mais profundo sobre o estudo dos números naturais, a escrita se torna essencial, pois permite identificar e examinar os registros escritos, eles fornecem os primeiros sinais de práticas de contagem. A documentação por escrito não só registra essas práticas, mas também possibilita a conservação e a disseminação do saber matemático através das gerações, atuando como uma ponte entre as civilizações antigas e a compreensão atual.

Os primeiros registros que podem ser concebidos como um tipo de escrita são provenientes da Baixa Mesopotâmia, onde atualmente se situa o Iraque. O surgimento da escrita e o da matemática nessa região estão intimamente relacionados. As primeiras formas de escrita decorreram da necessidade de se registrar quantidades, não apenas de rebanhos, mas também de insumos relacionados à sobrevivência e, sobretudo, à organização da sociedade (Roque, 2012, p. 31).

Para Boyer (1974) e Roque (2012) a mesopotâmia é um dos berços da civilização sendo o lar de várias culturas antigas, incluindo os sumérios, acadianos, babilônios e assírios. Essas culturas desenvolveram sistemas numéricos baseados em 60 (hexadecimal), que ainda hoje influenciam a forma como o tempo e os ângulos são medidos. No antigo Egito, os egípcios desenvolveram um sistema numérico decimal que usava hieróglifos para representar números. Este sistema permitiu realizar os complexos cálculos necessários à construção de pirâmides e outros monumentos arquitetônicos.

Figura 2: Sistema Sexagesimal Posicional

┐	1	┐	2	┐┐	3	┐┐	4	┐┐	5
┐┐	6	┐┐┐	7	┐┐┐	8	┐┐┐	9	◁	10
◁┐	11	◁┐	12	◁┐┐	13	◁┐┐	14	◁┐┐	15
◁┐┐	16	◁┐┐┐	17	◁┐┐┐	18	◁┐┐┐	19	◁◁	20
◁◁┐	21	◁◁┐	22	◁◁┐┐	23	◁◁┐┐	24	◁◁┐┐	25
◁◁┐┐	26	◁◁┐┐┐	27	◁◁┐┐┐	28	◁◁┐┐┐	29	◁◁◁	30
◁◁◁┐	31	◁◁◁┐	32	◁◁◁┐┐	33	◁◁◁┐┐	34	◁◁◁┐┐	35
◁◁◁┐┐	36	◁◁◁┐┐┐	37	◁◁◁┐┐┐	38	◁◁◁┐┐┐	39	◁◁◁	40
◁◁◁┐	41	◁◁◁┐	42	◁◁◁┐┐	43	◁◁◁┐┐	44	◁◁◁┐┐	45
◁◁◁┐┐	46	◁◁◁┐┐┐	47	◁◁◁┐┐┐	48	◁◁◁┐┐┐	49	◁◁◁	50
◁◁◁┐	51	◁◁◁┐	52	◁◁◁┐┐	53	◁◁◁┐┐	54	◁◁◁┐┐	55
◁◁◁┐┐	56	◁◁◁┐┐┐	57	◁◁◁┐┐┐	58	◁◁◁┐┐┐	59	┐	60

Fonte: Roque (2012)

Essa figura representa o sistema de numeração babilônico e é bastante interessante por utilizar apenas dois símbolos para representar todos os números. Isso é possível graças ao sistema posicional, onde o valor de cada símbolo depende da sua posição dentro do número. Por exemplo, o mesmo símbolo que representa 1 pode representar 60 se estiver em uma posição diferente. Essa característica faz com que o sistema babilônico seja sexagesimal, ou seja, baseado na base 60.

Como assegura Boyer (1974), Eves (1994) e Roque (2012): a evolução histórico-epistemológica dos números naturais é um tema que abrange milênios de descobertas matemáticas e filosóficas. Nesse sentido, podemos inferir que os números naturais constituem um dos alicerces da Matemática atual, cuja origem está relacionada às necessidades dos seres humanos primitivos de contar e organizar seus objetos.

Assim, compreendemos que a evolução histórico-epistemológica dos números naturais foi essencial para o desenvolvimento da Matemática e da Matemática escolar, uma vez que são vistos não apenas como ferramentas para contar e medir, mas também como partes da estrutura da Matemática, como por exemplo: Teoria dos Números, Aritmética, Combinatória, Análise Matemática, Teoria de Conjuntos, Matemática Discreta, e Logica Matemática.

3 METODOLOGIA

Em acordo com o referencial teórico descrito anteriormente e atender nosso objetivo, seguimos os caminhos investigativos orientados pela pesquisa bibliográfica e pelos pressupostos teórico-metodológicos apresentados anteriormente da abordagem Epistemológica Histórica articulada com noções da Teoria da Antropológica do Didático.

No tópico seguinte será analisado a transposição didática dos Números naturais a partir do momento em que o conteúdo apresentado no ensino fundamental pelo livro escolar escolhido para análise, onde geralmente o conteúdo aparece pela primeira vez, para que assim possamos analisar de forma comparativa os livros que foram aprovados pelo PNLD (2022-2026).

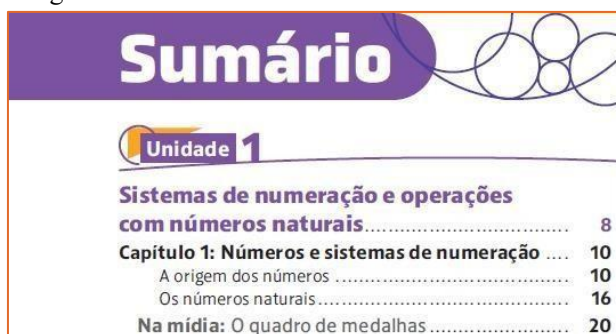
4 ANÁLISE DE DADOS

4.1 ANÁLISE DO LIVRO ESCOLAR

Optamos por analisar apenas uma obra para ilustrar a ideia geral do trabalho. A análise estará voltada para os números naturais, com relação a sua origem epistemológica histórica as civilizações que foram fundamentais para a construção do conceito de número e os sistemas de numeração.

A obra intitulada Matemática e Realidade está na sua 10ª edição, e apresenta uma organização com um total 9 unidades temáticas, a unidade 1 é intitulada “Sistemas de numeração e operações com números naturais”, e no capítulo 1 fala sobre Números e sistemas de numeração, os Números naturais representam um subtópico, como podemos observar na figura 3 a seguir.

Figura 3: sumário do livro Matemática e Realidade

A imagem mostra a capa do sumário de um livro. No topo, há uma barra roxa com o título "Sumário" em branco. Abaixo, há uma seção para a "Unidade 1" com um ícone de uma seta laranja. O conteúdo da unidade é listado com os respectivos números de páginas.

Unidade 1	
Sistemas de numeração e operações com números naturais.....	8
Capítulo 1: Números e sistemas de numeração	10
A origem dos números	10
Os números naturais.....	16
Na mídia: O quadro de medalhas	20

Fonte: Iezzi, Dolce e Machado, 2022

O Livro começa a apresentação do conteúdo de Números naturais, com o tópico, **a origem dos números**, onde o autor faz um breve resumo da origem dos números e sua importância na contagem de objetos, pessoas e animais, bem como na medição do tempo.

É possível perceber ao analisar o texto anterior que a abordagem sobre a origem dos números é bastante simplificada, limitando-se a uma breve menção à necessidade de contagem em atividades cotidianas. Em contraste, obras como as de Boyer (1974), Eves (1994) e Roque (2012) oferecem uma análise histórica e cultural aprofundada, explorando a evolução dos sistemas numéricos ao longo de milênios e as diferentes representações numéricas utilizadas por diversas civilizações.

A ausência de ilustrações no livro didático também limita a compreensão dos alunos sobre os conceitos apresentados. Embora seja compreensível que um livro didático para o ensino fundamental priorize a clareza e a objetividade, a falta de aprofundamento pode impedir que os alunos desenvolvam uma visão mais completa e abrangente sobre a história da matemática.

Em seguida os autores fazem referência a duas civilizações, bem como suas contribuições, o que causa divergência ao comparar com a abordagem de Boyer (1974), Eves (1994) e Roque (2012) em suas obras, haja vista que os eles optam por comentar sobre o antigo Egito e a Babilônia, que foram importantes para o processo de formalização do conceito de número.

Assim, portanto, o livro 'Matemática e Realidade' apresenta uma visão sobre a origem dos números que se distancia consideravelmente de obras clássicas como Boyer (1974), Eves (1994) e Roque (2012). Essa divergência pode prejudicar o aprendizado, pois a passagem inesperada das civilizações antigas para os números naturais cria uma lacuna na compreensão dos estudantes. A falta de uma conexão mais clara entre o passado e o presente dificulta a percepção da evolução dos sistemas numéricos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como podemos observar que a temática envolvendo a história epistemológica dos Números naturais e sua transposição didática é importante para a área da Didática da Matemática e consequente do ensino. A cronologia histórica elaborada possibilitou verificar se os livros do PNLD estão de acordo com os autores que foram estudados. Em nosso caso, vimos que não há coerência, em certos pontos entre os livros escolares atuais e as obras de referência dos autores da História da Matemática. O livro escolar apresenta poucas informações acerca da origem, e consequentemente não fornece uma cronologia precisa das civilizações.

Dentre outros resultados, nossa investigação aponta determinadas lacunas de ordem epistemológicas na construção do texto do saber em livros escolares, e de acordo com os estudos desenvolvidos neste trabalho podemos dizer que a epistemologia histórica dos números naturais e a transposição para os livros escolares pode ser compreendida de forma parcial, haja vista que precisaria de aprofundamentos teóricos, bem como outros livros para analisar a transposição didática. Em trabalhos futuros iremos aprimorar essa resposta.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, Saddo Ag. Fundamentos norteadores das teorias da Educação Matemática: perspectivas e diversidade. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, Belém, v. 13, n. 27, p. 5-35, set. 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/5514>. Acesso em: 24 out. 2024. DOI: <http://dx.doi.org/10.18542/amazrecm.v13i27.5514>.
- BOYER, Carl B. *História da matemática*. Tradução: Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- CHEVALLARD, Yves. *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Tradução: Claudia Gilman. 3. ed. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005.
- EVES, Howard W. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1994.
- ROQUE, Tatiana. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- RADFORD, Luis. *Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia*. Organização: Bernadete Morey e Iran Abreu Mendes. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- SCHUBRING, Gert. *Os números negativos – exemplos de obstáculos epistemológicos*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018.
- RADFORD, Luis. Identificando os pilares da teoria da objetificação. *Para a Aprendizagem da Matemática*, 2006.
- IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. *Matemática e realidade: 6º ano* [livro eletrônico]. 10. ed. São Paulo: Saraiva Educação, 2022. Formato: HTML. (Matemática e Realidade).

CONHECIMENTOS NEUROCIENTÍFICOS DE ESTUDANTES DE MATEMÁTICA SOBRE DISCALCULIA

 Crossref  10.56238/livrosindi202535-007**Sueli Pantoja da Silva**

E-mail: suelipantojadasilva@gmail.com

Fábio Colins

E-mail: fabiocolins@ufpa.br

RESUMO

A discalculia pode ser notada em crianças no início da vida escolar, quando apresentada acentuada dificuldade para entender conceitos e procedimentos matemáticos. Nesse contexto, esta pesquisa teve como objetivo analisar os conhecimentos teórico-metodológicos de estudantes do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Pará sobre discalculia. Para isso, foi desenvolvida uma pesquisa de natureza qualitativa e do tipo exploratória com 25 estudantes do 7º semestre do curso de Matemática, *Campus* Universitário de Mocajuba- PA. Eles responderam a um questionário com perguntas objetivas e subjetivas acerca da temática discalculia. Os resultados indicaram que os futuros professores de matemática desconhecem as principais características da discalculia e como agir diante de um aluno com essa comorbidade, necessitando a oferta, ainda na graduação, de uma disciplina específica que aborde aspectos neuro cognitivos relacionados ao transtorno da aprendizagem matemática.

Palavras-chave: Discalculia, Formação Inicial, Matemática, Professores.

1 INTRODUÇÃO

A discalculia é um transtorno específico da aprendizagem matemática. Esse transtorno de aprendizagem envolve, sobretudo, as habilidades cognitivas relacionadas à cognição numérica (Colins, 2020) o estudante com discalculia apresenta dificuldade acentuada no processamento de numerais e de quantidades, já desde os primeiros anos de escolarização formal. Atividades escolares simples como estabelecer uma relação entre o numeral 2 e a quantidade que ele representa (por exemplo, dois lápis), tarefas de contagem crescente e decrescente, determinar a posição de um número em uma reta numérica, compreender o sistema de numeração decimal e posicional, realizar transcodificação numérica tornam-se complexas para a criança com discalculia.

Percebe-se, então, que os prejuízos causados pela discalculia são diversos. Nesse contexto, surgem os seguintes questionamentos: *Os professores de matemática têm conhecimentos sobre as características e prejuízos causados pela discalculia? Na formação inicial, os professores tiveram acesso a conhecimentos sobre a discalculia? Na escola, a discalculia é tratada com a mesma preocupação que se trata a dificuldade em ler e escrever?*

Portanto, esses questionamentos direcionaram o desenvolvimento desta pesquisa, que tem como objetivo analisar os conhecimentos teórico-metodológicos de estudantes do curso de licenciatura plena em matemática da Universidade Federal do Pará sobre discalculia.

Em termos metodológicos, esta pesquisa caracteriza-se como de natureza qualitativa e do tipo exploratória (Menezes *et al.* 2019). O contexto da investigação foi uma turma de licenciatura em Matemática da UFPA, *Campus* Universitário de Mocajuba-PA. Os participantes da pesquisa foram 25 estudantes que cursaram o sétimo semestre do curso, logo futuros professores de matemática. Todos concordaram em participar do estudo e, com isso, responderam a um questionário de pesquisa via *Google Forms*. As informações construídas foram analisadas a partir do método de Análise de Conteúdo (Bardin, 2011).

Os resultados apontaram, por exemplo, que os futuros professores de matemática não conhecem a prevalência de estudantes da Educação Básica com discalculia e, que mesmo em fase de conclusão do curso de graduação, mais da metade da turma nunca tinha lido um artigo científico, dissertação, livro ou tese sobre discalculia ou neurociência e aprendizagem matemática. Isso mostrou a necessidade de oferecer, ainda na graduação, disciplina e minicursos ou palestras sobre a discalculia.

1.1 ASPECTOS NEURO COGNITIVOS DA DISCALCULIA

A discalculia não é um simples indício de um déficit cognitivo geral, ou seja, não significa ser ruim em Matemática. Muitas pessoas, por exemplo, podem achar função trigonométrica como um assunto escolar difícil, mas o estudante com discalculia não consegue resolver exercícios matemáticos simples como $7 + 2$ ou 5×3 . Por isso, para ser classificado como um estudante com discalculia, a dificuldade deve ser acentuada em habilidades matemáticas, e para isso é necessário utilizar testes padronizados para o rastreio da discalculia. Então, outros fatores como inteligência, motivação ou outros transtornos como a discalculia ou o TDAH não podem explicar o substancial baixo desempenho em um teste matemático padronizado.

Colins (2020) afirma que as pessoas que sofrem de discalculia podem ser altamente dotadas e bem-sucedidas em outras áreas do conhecimento que não dependem diretamente de habilidades matemáticas, por exemplo, tem a hipótese de que o escritor literário dinamarquês Hans Christian Andersen tinha discalculia. Além disso, os prejuízos da discalculia podem ser distintos nas pessoas, ou seja, algumas pessoas podem apresentar dificuldades no processamento automático de informações numéricas como associações entre o significado simbólico e quantidade, por outro lado, conseguir recuperar fatos aritméticos.

Nesse contexto, a discalculia se caracteriza como sendo um transtorno específico da aprendizagem da Matemática a qual pode ser percebida logo no início da vida escolar da criança quando esta não consegue realizar situações de fácil entendimento numérico. De acordo com a pesquisa de Vigna *et al.* (2022), os indivíduos que possuem discalculia apresentam relevantes dificuldades em suas habilidades numéricas, o que causa grandes impactos em suas vidas. Esses pesquisadores destacam que a prevalência de crianças em fase escolar com discalculia é de 3% a 7%. Esses dados são preocupantes, mas pouco são os investimentos para enfrentar essa problemática.

Esse transtorno de aprendizagem se apresenta em indivíduos que geralmente apresentam habilidades escolares em relação às demais temáticas ou disciplinas, porém é na matemática que eles apresentam baixo rendimento acadêmico, não conseguindo realizar atividades simples, como efetuar um algoritmo de subtração com recurso ou de adição com reserva. Ustun *et al.* (2021) afirmam que a discalculia é uma deficiência de aprendizagem específica da matemática que acarreta severas dificuldades para a aquisição de habilidades tanto numéricas quanto aritméticas.

Para Wilson *et al.* (2006), a discalculia consiste em uma desordem das habilidades matemáticas que se presume oriundas de comprometimento específico em diversas funções cerebrais responsáveis pela numerosidade. Os autores afirmam que a discalculia se assemelha com as disfunções da lecto escrita, ou seja, a dislexia. Os pesquisadores afirmam que as pessoas acometidas pela discalculia apresentam atraso precoce na compreensão de alguns aspectos da contagem, na adição de parcelas simples ($4 + 5$) e déficits persistentes em memorizar e recordar fatos aritméticos básicos, por exemplo, $3 + 7$ ou 4×5 (Wilson *et al.*, 2006). As causas da discalculia podem ser ocasionadas por disfunções genéticas (síndrome de Turner e síndrome de X frágil, por exemplo), assim como fatores como consumo alcoólico durante a gravidez.

Para Bastos (2016) a discalculia compromete as funções cerebrais complexas como o processamento verbal ou gráfico da informação matemática, percepção visuoespacial, reconhecimento e produção de números, representação numérica simbólica e não simbólica e fatos aritméticos básicos. Portanto, esse transtorno específico da aprendizagem matemática também é ocasionado por disfunções neuro cognitivas nos dois hemisférios cerebrais.

Além disso, sabe-se que a discalculia pode se apresentar de diversas formas diferentes, cabendo ao professor de matemática ficar atento aos tipos de dificuldades apresentadas pelos seus alunos. Ademais, vale ressaltar que geralmente a discalculia também estará associada à outra dificuldade de aprendizagem como a dislexia, por exemplo. Portanto, a realização de estudos sobre a discalculia é de grande valia, pois as pesquisas nesta área permitem que educadores, pais e todos aqueles envolvidos no processo possam proporcionar intervenções e o apoio adequado.

A compreensão de fatores relacionados a esse distúrbio de aprendizagem é essencial para identificar precocemente os desafios enfrentados pelos alunos e oferecer novas estratégias de ensino. Por isso, faz-se necessário discutir ainda na graduação os prejuízos causados pela discalculia e as possíveis intervenções pedagógicas.

2 METODOLOGIA DA PESQUISA

Esta pesquisa assumiu uma abordagem de natureza qualitativa, ou seja, um processo de investigação que possibilita tanto a compreensão como a interpretação do fenômeno pesquisa (Menezes *et al.*, 2019), neste caso, o conhecimento teórico- metodológico dos futuros professores de matemática em relação à discalculia. Em relação ao objetivo da investigação, esta pesquisa é do tipo exploratória, isto é, um estudo que “se caracteriza pelo desenvolvimento e esclarecimento de ideias, com objetivo de fornecer uma visão panorâmica, uma primeira aproximação a um determinado fenômeno que é pouco explorado” (Menezes *et al.*, 2019, p. 34).

O contexto da investigação foi uma turma de licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Pará, *Campus* Universitário de Mocajuba-PA, regime intervalar-intensivo. Essa turma era composta por 25 estudantes que estavam cursando o sétimo semestre do curso. Desse modo, futuros professores de matemática. Todos os participantes manifestaram interesse em colaborar com a pesquisa e, por questões éticas da pesquisa, nenhum participante foi identificado.

A construção das informações foi realizada a partir de um questionário do *Google Forms* disponibilizado em um grupo de *WhatsApp* da turma. Entre as perguntas pode-se citar as seguintes: *Você estudou alguma disciplina durante o curso de Matemática que abordasse a temática discalculia? Você já leu algum relatório de pesquisa, artigo científico, dissertação ou tese sobre Neurociência e Aprendizagem Matemática? Qual das seguintes condições costuma ser uma característica da discalculia? Qual das ações proativas o professor de estudantes com discalculia deve adotar na sua prática? Que tipos de intervenção são consideradas particularmente eficazes no tratamento da discalculia?* Percebe-se, portanto, que esses questionamentos contemplaram aspectos teóricos e aspectos metodológicos acerca da discalculia.

As respostas dos estudantes foram organizadas em gráficos pela própria ferramenta do *Google Forms*. Assim, as informações produzidas foram analisadas a partir de procedimentos analíticos baseados no método bardiniano de Análise de Conteúdo, ou seja, “um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando a obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens” (Bardin, 2011, p. 47). Esse método permitiu que inferências fossem realizadas a partir da leitura e da interpretação do material empírico

produzido. Então, os resultados desta pesquisa foram analisados com a finalidade de compreender os conhecimentos teórico-metodológicos dos futuros professores de matemática acerca da discalculia. Portanto, na seção seguinte, dar-se-ão as discussões acerca dos resultados desta pesquisa.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

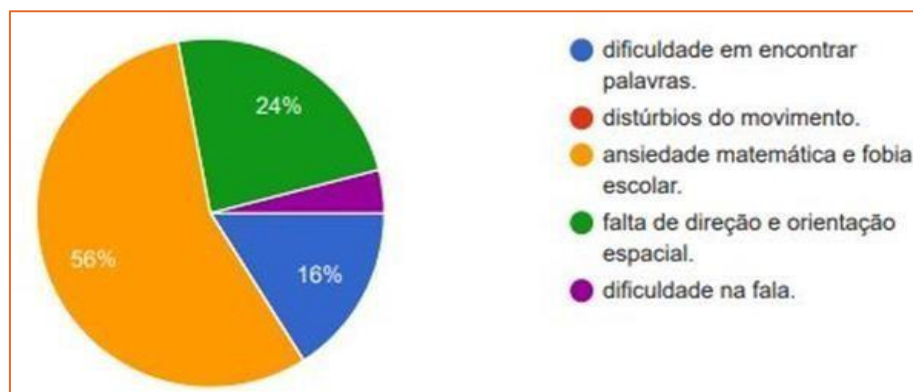
Os resultados desta pesquisa apontaram que muitos estudantes do curso de Matemática, em fase de conclusão de curso, não tiveram acesso à temática discalculia, pois o questionamento - *Você estudou alguma disciplina durante o curso de Matemática que abordasse a temática discalculia?* - indicou que cerca de 76% dos professores em formação inicial não têm acesso, ainda na graduação, às temáticas relacionadas à discalculia. Isso mostra que os projetos pedagógicos dos cursos de Matemática precisam ser reformulados, e que nesse processo, busquem inserir na grade curricular disciplinas que discutam a aprendizagem matemática na perspectiva da neurociência cognitiva. Faz-se necessário, por exemplo, o futuro professor de matemática conhecer os mecanismos neurais responsáveis pelo processo de contagem e de produção numérica, domínios cognitivos prévios ao cálculo.

Nessa perspectiva, faz-se necessário que os estudantes da licenciatura em Matemática tenham acesso aos materiais que discutem a discalculia. Por isso, foi feito o seguinte questionamento: *Você já leu algum relatório de pesquisa, artigo científico, dissertação ou tese sobre Neurociência e Aprendizagem Matemática?*

Os resultados mostraram que 56% dos participantes não tiveram acesso às leituras sobre neurociência. Ler sobre os estudos das neurociências pode ajudar os futuros professores de matemática a quebrarem alguns neuromitos, como contar nos dedos diante de uma operação aritmética. Haberstroh e Schulte-Körne (2019) esclarecem que a contagem dos dedos em si não é um sinal de discalculia, mas sim um auxílio comum para a memorização de fatos aritméticos e o aprendizado de estratégias de cálculos mais eficientes. Por outro lado, se com o avanço dos anos escolares a contagem nos dedos persistir, sobretudo em cálculos simples como $2 + 3$, isso pode ser um indicador do transtorno específico da aprendizagem matemática. Então, ler, desde o período de formação inicial, sobre a discalculia pode ajudar o futuro professor de matemática a compreender que o aluno com discalculia pode apresentar outras comorbidades associadas, particularmente, a dislexia, o transtorno de déficit de atenção/hiperatividade. Ademais, desenvolver transtornos como ansiedade e depressão ou tornar-se agressivo e transgressor de regras.

Com relação aos conhecimentos sobre as principais características da discalculia, os alunos apresentaram respostas variadas para a pergunta: *Qual das seguintes condições costuma ser uma característica da discalculia?* O gráfico 1 mostra o resultado do questionário:

Gráfico 1: Características da discalculia



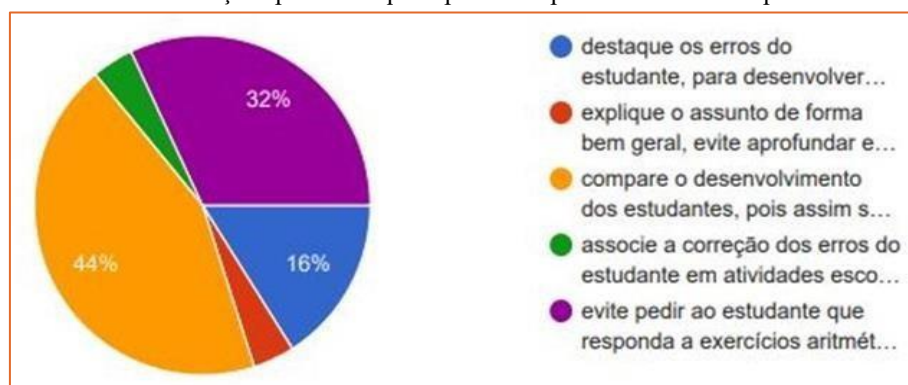
Fonte: Questionário de Pesquisa, 2023.

O gráfico 1 expõe que 56% dos discentes do curso de licenciatura em Matemática acreditam que ansiedade matemática e a fobia escolar são condições características da discalculia. Contudo, essas comorbidades são geradas pela discalculia e não são características. Os estudantes com discalculia têm dificuldades acentuadas em diversas habilidades relacionadas à cognição numérica, como operações matemáticas, recuperação de fatos aritméticos, processamento numérico etc. Por isso, segundo Santos (2017), um aluno com discalculia necessita de mais tempo para resolver um problema de matemática. Além disso, a memória de trabalho visuoespacial também é afetada pela discalculia, por exemplo, localizar-se e movimentar-se no plano a partir de vários pontos de referência torna-se um desafio à pessoa com discalculia. Portanto, a falta de direção e orientação espacial é uma característica da discalculia.

Portanto, os resultados mostraram (gráfico 1) que 19 estudantes de Matemática (76%), de um grupo de 25 estudantes, não possuem conhecimentos sobre quais são as condições características que um indivíduo com discalculia apresenta. O acesso a esse conhecimento, ainda na graduação, seria importante para que no futuro, como professor de matemática, esse profissional tivesse condições de reconhecer um aluno com discalculia e, assim, ajudá-lo a enfrentar suas dificuldades. Por isso, nesta pesquisa, defende-se que o professor de Matemática precisa conhecer a discalculia e como o aluno com essa comorbidade aprende matemática.

Sobre as práticas metodológicas a serem adotadas pelo professor de um estudante com discalculia, os discentes responderam o seguinte questionamento: *Qual das ações proativas o professor de estudantes com discalculia deve adotar na sua prática?* As respostas seguem segundo o gráfico 2:

Gráfico 2: Ações proativas que o professor pode adotar em sua prática.



Fonte: Questionário de Pesquisa, 2023.

O gráfico 2 mostra que a maioria dos futuros professores de matemática (44%) afirmam que a prática ideal para ser adotada por professores de alunos com discalculia é comparar o desenvolvimento dos estudantes, pois assim o aluno saberá como está em relação à aprendizagem matemática. Essa atitude docente é prejudicial ao estudante com discalculia, pois além de expor a dificuldade do aluno, reforça o fracasso escolar. Nesse caso, o professor de matemática deve estimular a motivação e evitar punições, porque expor a dificuldade do aluno é o mesmo que puni-lo.

Por outro lado, 32% dos participantes (gráfico 2) compreendem que o adequado é evitar que o aluno responda exercícios aritméticos em voz alta ou na lousa, de improviso. Essa é a atitude docente esperada de um professor de matemática que tem um aluno com discalculia. Além disso, o docente pode construir um programa de conteúdos matemáticos mais acessíveis ao aluno. Isso pode provocar a motivação para aprender e compensar os prejuízos causados pela discalculia e, sobretudo, reduzir a ansiedade matemática por meio da motivação. Logo, os resultados mostram que os estudantes têm pouco conhecimento sobre a temática abordada e que os diálogos sobre o tema precisam ser realizados nos cursos de graduação, pois se trata de conhecimentos essenciais para a formação do professor de matemática.

As respostas dos participantes mostraram que ainda não há nos projetos pedagógicos dos cursos de matemática, pelo menos nos cursos da Universidade Federal do Pará, disciplinas voltadas para o estudo do transtorno específico da aprendizagem matemática ou discalculia. Essa realidade precisa mudar, visto que o professor de matemática tem um papel fundamental no

processo de aprendizagem do estudante com discalculia. Portanto, espera-se que esta pesquisa mobilize os coordenadores de curso a criarem, pelo menos, uma disciplina sobre discalculia.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa provocou uma reflexão em relação às contribuições que os estudos translacionais da neurociência cognitiva para o processo de ensino e aprendizagem de estudantes com discalculia ou com outras comorbidades (dislexia, TDAH, disgrafia, disortografia) e com deficiências. Este estudo também contribuiu para que o futuro professor de matemática repense suas aulas e as possíveis intervenções pedagógicas diante de um caso de estudante com discalculia. Desse modo, conhecer o funcionamento do cérebro em relação à cognição numérica possibilita ao professor organizar sua aula de modo a contribuir ou facilitar a aprendizagem do aluno com transtorno de aprendizagem.

Em relação à prática docente, quando o professor de matemática tem conhecimento sobre os prejuízos causados pela discalculia, ele pode ensinar estratégias cognitivas aos alunos com discalculia com a finalidade de melhorar o desempenho escolar desse estudante em matemática. Por exemplo, entre as estratégias estão comparar a numerosidade, estimar resultados de operações aritméticas entre elementos de dois conjuntos de pontos, sem ter que contá-los etc. Esta pesquisa mostrou que essas habilidades são determinantes para a melhoria do desempenho matemático relacionado ao domínio do senso numérico, por exemplo. Por fim, esta pesquisa também possibilitou inferir sobre a importância de o professor de matemática, desde a formação inicial, ter acesso aos conhecimentos sobre as principais comorbidades relacionadas à aprendizagem matemática.

REFERÊNCIAS

- BARDIN, Laurence. *Análise de conteúdo*. São Paulo: Edições 70, 2011.
- BASTOS, José Alexandre. Matemática: distúrbios específicos e dificuldades. In: ROTTA, N. T.; BRIDI-FILHO, C. A.; BRIDI, F. R. de S. *Neurologia e aprendizagem: abordagem multidisciplinar*. Porto Alegre: Artmed, 2016.
- COLINS, Fábio. *Ensino e aprendizagem de matemática na Síndrome de Williams-Beuren: uma abordagem a partir de pesquisas em neurociência cognitiva*. 2020. 144 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas – PPGECEM) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.
- HABERSTROH, Stefan; SCHULTE-KÖRNE, Gerd. Diagnóstico e tratamento da discalculia. *Deutsches Ärzteblatt International*, v. 116, p. 107–114, 2019. Disponível em: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC6440373/>. Acesso em: 06 ago. 2023.
- MENEZES, Afonso Henrique et al. *Metodologia científica: teoria e aplicação na educação a distância*. Petrolina, PE, 2019.
- SANTOS, Flávia Heloísa dos. *Discalculia do desenvolvimento*. São Paulo: Pearson, 2017.
- USTUM, Sertaç et al. Crianças com discalculia mostram hiperatividade hipocampal durante a percepção de números simbólicos. *Frontiers in Human Neuroscience*, v. 15, 2021. doi: 10.3389/fnhum.2021.687476. Disponível em: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC8330842/>. Acesso em: 04 ago. 2023.
- VIGNA, Giulia et al. Dyscalculia in early adulthood: implications for numerical activities of daily living. *Brain Sciences*, v. 12, n. 3, p. 373, 2022. doi: 10.3390/brainsci12030373. Disponível em: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC8946289/>. Acesso em: 04 ago. 2023.
- WILSON, Ana J. et al. An open trial assessment of “The Number Race”, an adaptive computer game for remediation of dyscalculia. *Behavioral and Brain Functions*, v. 2, n. 20, 2006. Disponível em: <https://behavioralandbrainfunctions.biomedcentral.com/>. Acesso em: 12 jan. 2023.

ESTRATÉGIAS ALTERNATIVAS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA: VIVÊNCIAS DO PROGRAMA RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA NO ENSINO MÉDIO

  10.56238/livrosindi202535-008

Ronald Sanches Garcia

E-mail: ronald.garcia@cameta.ufpa.br

Gustavo Delgado da Gama

E-mail: gustavo.gama@cameta.ufpa.br

Emilly Duarte Gaia

E-mail: emilly.gaia@cameta.ufpa.br

Sebastião Corrêa Valente

E-mail: sebastiao.valente3527@escola.seduc.pa.gov.br

Daniele Esteves Pereira Smith

E-mail: danielczyk@gmail.com

RESUMO

Este relato de experiência, visa apresentar algumas das vivências dos residentes do núcleo de matemática do Programa Residência Pedagógica, em execução no período de maio de 2023 à abril de 2024, sendo realizado nas escolas de ensino médio da cidade de Cametá. Relatamos aqui algumas das oficinas pedagógicas desenvolvidas e aplicadas nas aulas de matemática através do PRP, destacamos como metodologia os momentos formativos que serviram de preparação para os residentes e as aplicações das oficinas para os alunos do ensino médio. Os resultados observados a partir dessas metodologias, indicam um caminho promissor para a educação matemática, fazendo com que o aluno se envolva ativamente durante as aulas e desenvolvam maior interesse pela matemática. Por fim, destacamos a eficácia das oficinas como estratégia alternativa de ensino ressaltando a importância de metodologias diversificadas que escapem do ensino tradicional e enriquecem o processo de aprendizagem dos alunos.

Palavras-chave: Programa Residência Pedagógica, Metodologia, Oficinas Matemáticas, Aprendizagem.

1 INTRODUÇÃO

Este relato tem como objetivo apresentar algumas das experiências vivenciadas durante o Programa Residência Pedagógica (PRP), sendo exercido no período de maio de 2023 à abril de 2024, demonstrando todo o processo de elaboração e aplicação das atividades desenvolvidas e aplicadas durante o período e com base nas aplicações, evidenciar os resultados obtidos a partir do ponto de vista dos residentes do núcleo de matemática do campus universitário do Tocantins/Cametá.

O PRP, financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, possui como objetivo central aperfeiçoar a formação de discentes dos cursos de licenciatura, através da elaboração de projetos que enriquecem o campo da prática e orientem o licenciando a exercer de forma ativa a relação entre a teoria e prática profissional docente.

O programa teve sua realização nas escolas de ensino médio do município de Cametá, onde foram executadas atividades variadas, sempre alinhadas a temática do subprojeto do núcleo do PRP, intitulado “OFICINAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA”.

Desse modo, foram desenvolvidas duas oficinas ao longo do programa, a primeira delas possui como temática “O uso da história da matemática no ensino de operações aritméticas”, fundamentadas na história da matemática. Já a segunda abordou tinha como tema “Oficina do GeoGebra” onde apresentávamos o software e sua utilidades aos alunos. Para o desenvolvimento das atividades relatadas, contamos com orientações e diversos momentos formativos realizados pela docente orientadora do programa, a fim de garantir a obtenção dos melhores resultados possíveis nas aplicações das atividades.

Assim, o presente relato está alinhado aos conhecimentos e saberes da prática docente adquiridos durante o desenvolvimento do PRP, sendo um significativo instrumento de incentivo à formação e aprimoramento das práticas de ensino e potencializador das dinâmicas de ensino.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O Programa Residência Pedagógica tem como principal finalidade a formação iniciada e continuada dos professores, que possibilita a colaboração das universidades e escolas, visando analisar as práticas escolares e validar esse ambiente como espaço formativo. Segundo Barbosa e Santana (2019);

Em pesquisas realizadas pelo grupo que coordena, a parceria entre universidade e escola pode se constituir em ambientes para a consolidação de práticas colaborativas, reflexivas e investigativas que podem contribuir para a formação, tanto dos professores que já atuam, como para os futuros professores que ensinam matemática” (BARBOSA e SANTANA 2019, p. 2).

O autor destaca a importância da parceria entre universidade e escolas para a colaboração da formação continuada de professores no âmbito escolar, especialmente na área de matemática. Ao destacar novos ambientes, que buscam favorecer práticas colaborativas, reflexivas, investigativas entre outros aspectos. Essa colaboração enriquece não apenas experiência dos professores em atividade, mas também entendemos o PRP como um instrumento que orienta e direciona a preparação inicial de docentes.

Para o ensino da matemática, as oficinas se tornam alternativas metodológicas importantes para as estratégias de ensino. O professor de matemática poderá utilizar materiais manipuláveis e atividades criativas que levem o aluno a se interessar pelo conteúdo matemático.

Durante o PRP foram realizadas duas oficinas, a primeira oficina abordava o tema “O uso da história da matemática no ensino de operações aritméticas fundamentais” e a segunda abordou o tema “Oficina do Geogebra”, aplicando o software GeoGebra no ensino médio. Portanto, ao tratar de oficinas, essas sempre buscam promover e estimular o conhecimento, já que permite criação e recriação de metodologias alternativas, materiais, ferramentas e conceitos. Essa proposta é baseada na relação do sujeito com o objeto de estudo específico, incentivar a interação e buscar a exploração e aprofundamento do aprendizado. Segundo Anastasiou e Alves (2004).

A oficina se caracteriza como uma estratégia do fazer pedagógico onde o espaço de construção e reconstrução do conhecimento são as principais ênfases. É lugar de pensar, descobrir, reinventar, criar e recriar, favorecido pela forma horizontal na qual a relação humana se dá, vivenciar ideias, sentimentos, experiências, num movimento de reconstrução individual e coletiva. (ANASTASIOU e ALVES, p. 95)

Portanto, a utilização de oficinas evidencia a importância de novas estratégias de ensino, visando facilitar a compreensão do conteúdo pelos alunos do ensino médio. Dessa forma, as aulas através de oficinas são importantes, pois, através dessa metodologia o ensino se torna mais dinâmica e prazerosa, fugindo do ensino tradicional e buscando sempre uma interação com a disciplina de matemática. Além disso, essas práticas promovem uma oportunidade para estimular o conhecimento com base nos conceitos trabalhados.

Explorando a História e a Tecnologia no Ensino de Matemática, por meio de Abordagens Práticas no Ensino Médio.

Em relação à metodologia utilizada para a realização das atividades relatadas podemos destacar três momentos, sendo eles: Momentos formativos, realização de uma oficina para os discentes do curso de licenciatura em matemática e por fim, aplicação das oficinas nas escolas de ensino médio. Durante o período de execução do programa, a docente orientadora, realizou junto dos residentes, diversos momentos formativos onde nos era dado direcionamentos para o desenvolvimento e aplicação das oficinas, momentos esses que colaboraram positivamente para a elaboração das atividades.

O segundo momento que queremos destacar é a aplicação da oficina intitulada “O uso da história da matemática no ensino de operações aritméticas fundamentais” para os discentes ingressantes no curso de licenciatura em matemática, como parte da programação do evento “I Circuito de Oficinas Matemáticas”. Evento esse organizado pela docente orientadora do PRP, que realizou o convite para que pudessemos ministrar a oficina no evento.

O último dos três momentos, é a realização das oficinas nas escolas de ensino médio, onde foram aplicadas duas oficinas nas turmas do ensino médio, a primeira delas tinha como finalidade demonstrar que há outras maneiras de resolver as operações aritméticas, como multiplicação e divisão que eram utilizados pelos povos antigos. Desse modo, foram apresentados os métodos de multiplicação árabe, chinesa e egípcia e também a divisão egípcia. Na aplicação da oficina, inicialmente foi demonstrado através de exemplos, alguns métodos de multiplicação e divisão utilizados pelas populações antigas, posteriormente realizamos uma dinâmica onde, os alunos teriam que desenvolver as atividades através dos métodos apresentados para eles.

Dessa forma, buscamos apresentar detalhes do desenvolvimento da oficina, a metodologia utilizada para elaboração da atividade durante sua aplicação, demonstramos os resultados obtidos através da realização da atividade executada. Como demonstra a figura 1.

Figura 1: Aplicação da oficina “O uso da história da matemática no ensino de operações aritméticas fundamentais”



Fonte: Os autores

Na segunda oficina visávamos apresentar aos alunos o *software* GeoGebra e suas aplicações, assim, realizamos a oficina em dois momentos, primeiramente realizamos uma aula expositiva para mostrar aos alunos uma visão geral do *software*, suas funcionalidades e ferramentas. Já no segundo momento realizamos uma aula pratica junto com os estudantes onde com eles criamos e desenvolvemos alguns conteúdos utilizando o GeoGebra, como funções do 1º e 2º grau, polígonos e progressão aritmética, onde mostrávamos passo a passo para que os alunos pudessem desenvolver os exemplos conosco.

Figura 2: Aplicação da “Oficina do GeoGebra”



Fonte: Os autores.

3 ANÁLISE DE DADOS

Após realizada a coleta de dados das oficinas através do questionário e das atividades, o objetivo do trabalho se direcionava à análise das informações dos resultados e buscar compreender o que se foi adquirido. Realizamos as oficinas nas turmas do ensino médio, com o intuito de apresentar aos alunos o “software Geogebra” e “O uso da história da matemática no ensino de operações aritméticas” como ferramenta pedagógica de ensino matemático. Aplicada na Escola Estadual de tempo integral pelo programa do Residência pedagógica. Segundo Gil (2019, p. 137).

O questionário é uma das técnicas mais basilares para coletar dados em pesquisas e, portanto, é muito utilizada, sendo composta por um conjunto de questões que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, aspirações, temores, comportamento presente ou passado etc." (Gil, 2019, p. 137).

Na primeira oficina “software Geogebra”, foi desenvolvido algumas atividades nas turmas do ensino médio. E com a análise dos dados obtidos, foi elaborado uma tabela que identifica os objetivos, resultados e dificuldades. Esse trabalho de pesquisa compilou cinco atividades, conforme apresentado na tabela 1 a seguir.

Tabela 1: Atividades, objetivos, resultados e dificuldades

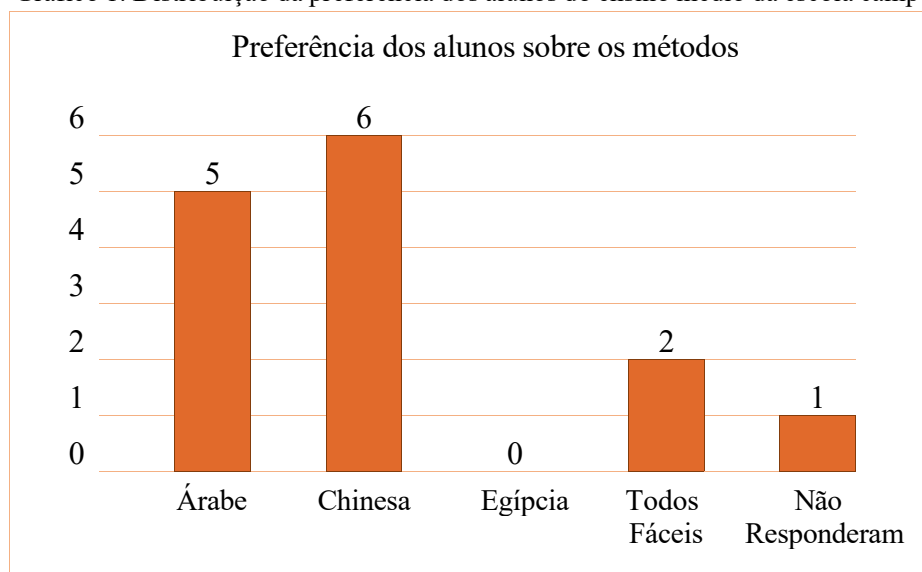
Atividades	Objetivos	Resultados	Dificuldades
1: Criar polígonos regulares e círculos inscritos e circunscritos	Desenvolver polígonos regulares e círculos inscritos e circunscritos no Geogebra.	Aperfeiçoamento das habilidades na criação de polígonos regulares e círculos inscritos e circunscritos através do geogebra.	Pouca familiaridade por parte de alguns alunos com o uso da tecnologia.
2: Criar função afim	Interpretação da função no registro algébrico para o gráfico.	Compreensão do impacto das mudanças dos valores das incógnitas da função afim.	Desafio na compreensão da função afim e seu gráfico.
3: Função do 2º grau	Interpretação da função quadrática no registro algébrico para o gráfico.	Análise do comportamento da função (concavidade, intervalos de crescimento e decrescimento).	Encontrar os pontos máximos e mínimos da parábola.
4: Criar círculo trigonométrico	Investigar propriedades e conceitos através do Geogebra.	Explorar conceitos trigonométricos e o uso das ferramentas do Geogebra.	Obstáculos como compreender conceitos trigonométricos, como criar círculos.
5: Desenvolver Progressão Aritmética (P.A)	Desenvolvendo (P.A) no Software Geogebra	Uso concreto do software Geogebra para explorar Progressões Aritméticas (P.A)	Encontrar o Termo Geral da (P.A) no desenvolvimento da atividade através do geogebra

Fonte: Os autores

Na segunda oficina, os resultados revelaram um aumento significativo na compreensão dos alunos sobre os conceitos matemáticos abordados. A discussão no artigo sugere que a inclusão de métodos matemáticos de diferentes culturas pode enriquecer o currículo de matemática e aumentar o engajamento dos alunos.

A discussão também ressalta a importância de considerar a diversidade cultural na educação matemática, pois, como foi observado que a maioria dos alunos não possui contato com a história da matemática de outros povos. Nesse sentido, alguns dados foram gerados a partir da exposição, como mostrada no gráfico abaixo:

Gráfico 1: Distribuição da preferência dos alunos do ensino médio da escola campo



Fonte: Os autores

Uma das observações mais relevantes percebidos, foi como o aumento do engajamento das oficinas matemáticas transformaram a rotina tradicional de aula em algo dinâmico e interativo. Os alunos se sentiram desafiados e motivados a participar, isso é especialmente importante no ensino médio, onde o desinteresse pela matemática é comum. Uma das análises foi realizada com base no comportamento e interesse dos alunos durante a execução das atividades, notamos que os estudantes demonstraram constante participação nos desenvolvimentos das tarefas, evidenciada pela resolução de atividades no quadro.

Apesar dos resultados positivos, é importante destacar que o sucesso dessa abordagem depende de uma implementação bem planejada. Professores precisam selecionar materiais adequados aos conteúdos e ao nível de dificuldade dos alunos. Essa escolha criteriosa é crucial para garantir que as atividades sejam desafiadoras, mas ao mesmo tempo acessíveis, promovendo um aprendizado efetivo e significativo.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Atuar como professor residente do PRP se tornou uma experiência única e fundamental para a formação docente significativa, buscando se qualificar através das metodologias implementadas pelo programa. As oficinas executadas nas turmas do ensino médio, como “O uso da história da matemática no ensino de operações aritméticas” e “Oficina do Geogebra”, provaram ser instrumentos eficientes como estratégias metodológicas, fugindo do ensino tradicional e enriquecendo o aprendizado dos alunos.

As oficinas matemáticas expostas para os alunos do ensino médio têm se mostrado uma abordagem eficaz para promover um aprendizado mais dinâmico, contextualizado e significativo. Essa abordagem promove um ambiente de aprendizagem mais envolvente e colaborativo, facilita a compreensão de conceitos abstratos e amplia a capacidade dos alunos de aplicar o conhecimento matemático em situações práticas. Os resultados obtidos indicam um aumento notável na interação dos alunos e participação, destacando o empenho nas execuções das atividades promovendo um aprendizado efetivo e significativo.

Concluimos, que a Participação no PRP é essencial para a formação continuada de professores e para a implementação de outras metodologias de ensino. A troca de experiências entre docentes e residentes, associada a execução de outros métodos pode contribuir significativamente a educação matemática, buscando qualificar os graduandos e aprimorar suas técnicas de ensino, preparando para qualquer desafio que poderá ter como docente, garantindo que seus alunos possam se beneficiar de um ensino de qualidade, criativo e significativo.

REFERÊNCIAS

ANASTASIOU, Léa G. C.; ALVES, Lucídio P. Estratégias de ensinagem. *Processos de ensinagem na universidade: pressupostos para as estratégias de trabalho em aula*, v. 3, p. 67–100, 2004.

GIL, Antonio Carlos. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 7. ed. Rio de Janeiro: Atlas, 2019. E-book. p. 137. ISBN 9788597020991. Disponível em: <https://app.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788597020991/>. Acesso em: 27 out. 2024.

SANTANA, Flávia Cristina de Mâcedo; BARBOSA, Jonei Cerqueira. A relação universidade/escola e o Programa Residência Pedagógica/subprojeto de matemática: estratégias de poder e modos de subjetivação. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 4, n. 2, p. 1–24, 2019.

O ENSINO DE MATEMÁTICA PARA ALUNOS COM TRANSTORNO DO ESPECTRO AUTISTA

 Crossref  10.56238/livrosindi202535-009

Bianca Cristiane da Silva Maia

E-mail: bianca983186800@gmail.com

Denivaldo Pantoja da Silva

E-mail: denivaldo@ufpa.br

José dos Santos Guimarães Filho

E-mail: js_guima@hotmail.com

RESUMO

Este artigo é pautado no período de estágio III realizado em uma escola na zona urbana do município de Mocajuba. Durante as observações na sala de Atendimento Educacional Especializado (AEE), desperta-se o interesse em investigar o ensino de matemática, nesse sentido surge a pergunta: como propor uma ação diádica para o ensino de matemática com alunos autistas? Nosso objetivo é investigar o processo de ensino de matemática com dois alunos com transtorno do Espectro Autista (TEA) dessa escola. A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica qualitativa. Portanto, os resultados da ação didática demonstram que é viável desenvolver o conteúdo de geometria plana, mas o nível de autismo dos alunos leva a resultados distintos.

Palavras-chave: Autismo, Ensino, Ensino de Matemática.

1 INTRODUÇÃO

Este artigo investiga o ensino de matemática para alunos com transtorno do espectro autista (TEA) na sala de atendimento educacional especializado (AEE) em uma escola do município de Mocajuba. A área de concentração desse estudo é o ensino de matemática na sala do AEE. Uma das etapas do estágio III, foram as observações em sala de aula, que nos permitiu analisar as práticas e as metodologias empregadas pelo professor em sala de aula, bem como estudar o comportamento e desempenho dos educandos.

Nesse momento, as observações se concentraram em todo o ensino, mas em especial na abordagem de matemática na sala do AEE. Segundo a professora, essa é pouco explorada, com foco frequente apenas em numerais e na operação numérica de adição. Isso despertou o interesse em investigar como ocorre o ensino dessa disciplina. Assim, como propor uma ação didática para o ensino de matemática com alunos autistas?

Neste artigo, objetivamos investigar o processo de ensino da matemática com dois alunos com Transtorno do Espectro Autista (TEA), na sala do Atendimento Educacional Especializado (AEE). A metodologia deste trabalho consiste em uma abordagem qualitativa, fundamentada em observações sistemáticas realizadas durante o estágio em uma escola no

município de Mocajuba. O processo incluiu a análise das práticas docentes em sala de aula, com ênfase nas metodologias utilizadas para o ensino de matemática no contexto do AEE.

O estudo buscou compreender como se desenvolve o ensino de matemática para esses alunos por meio de observações, um questionário para coletar dados sobre a abordagem da disciplina, identificando os recursos utilizados pela docente. Por fim, propôs-se um recurso de intervenção que atendesse às habilidades dos alunos, com o desenvolvimento de atividades impressas, utilizando materiais lúdicos e manipuláveis, visando garantir um aprendizado significativo para os estudantes com autismo. Em seguida, vamos abordar as leis encontradas ao nível federal, estadual e municipal.

1.1 AS LEIS

O acesso à educação é direito de todos, e dessa forma, o conceito de educação inclusiva visa à inclusão. A escola é inclusiva quando ela garante a qualidade e equidade no ensino educacional a cada um de seus alunos, reconhecendo e respeitando as diversidades de acordo com suas potencialidades.

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS) (2018), O transtorno do espectro autista é caracterizado por déficits na interação social e comunicação, além de padrões restritos e repetitivos de comportamento. Os sintomas surgem na infância, mas podem se manifestar mais tarde, impactando diversas áreas da vida do indivíduo. O funcionamento intelectual e as habilidades de linguagem.

A fim de garantir os direitos da pessoa com autismo, temos em Brasil (1990, p.3) o ECA – Estatuto da Criança e do Adolescente que garante direitos fundamentais da criança e do adolescente e de pessoas com deficiência e TEA (Lei n.º 8.069/1990). Ainda mais, encontramos em Brasil (2012, p.)

que instituiu a política nacional de proteção dos direitos da pessoa com TEA, garantindo acesso à saúde, educação e inclusão e outras informações disposta na lei como mercado de trabalho, assistência e previdência e acompanhamento especializado nas classes de ensino comum regular e a carteira de identificação de pessoa autista. (Lei n.º 12.764/2012)

A nível estadual do Pará, encontramos no amparo a lei 9.061/2020 (PEPTEA), que é uma Política estadual de proteção dos direitos da pessoa com transtorno do espectro autista. Em Mocajuba temos a lei 3.919/2023 que proíbe fogos e artefatos pirotécnicos ruidosos na cidade aprovada pela câmara, a lei visa não somente o olhar humanizado para as pessoas com transtorno do espectro autista, como também animais domésticos e proteção de crianças e idosos. A parti

das leis que garantem o direito dos autistas que buscamos possibilidades para garantir o direito a educação dos alunos TEA.

1.2 EXPERIÊNCIAS E POSSIBILIDADES DO ENSINO DA MATEMÁTICA COM ALUNOS COM TEA

Ao abordar sobre desafios e possibilidades do ensino da matemática com alunos com TEA, Negrão e Mendes (2022) já deixam claro que se fizermos um levantamento de campo nas escolas teremos como afirmar que são poucos alunos que gostam da disciplina da matemática, portanto, é necessário que o professor crie formas de abordar os conteúdos matemáticos de forma que instigue os alunos, de acordo com suas limitações específicas.

Seabra (2022) sobre autismo, educação inclusiva e ensino de matemática, ao desenvolver uma pesquisa em uma escola da região metropolitana de Belém-Pará. Seabra analisou a realidade de três alunos com TEA nas séries finais do ensino fundamental, identificando dificuldades como a falta de atenção, isolamento e problemas com a abstração. Os professores relatam que, devido à limitação de tempo e à falta de suporte adicional, utilizam estratégias de flexibilização e avaliações adaptadas para engajar esses alunos. No entanto, os principais desafios incluem a ausência de professores auxiliares, a necessidade de capacitação contínua e problemas de infraestrutura, além da pouca participação das famílias.

Em relação ao ensino de matemática, Lemos (2023) destaca que as crianças apresentam dificuldade na matemática, porém aplicações de jogos, como sugere o autor, são importantes, pois cumprem um papel exploratório e de aplicação de conceitos matemáticos e resoluções de problemas com estratégias. Lima (2022) por exemplo, cita em sua experiência como a utilização de jogos em sala promove não só a socialização com demais alunos, como o foco e contribui na aprendizagem, a autora também menciona que os professores do ensino fundamental são pedagogos e que nem sempre dispõem de um domínio completo da disciplina específica, em sua observação ela menciona que são poucos os que possuem e que aplicam atividades de matemática com uso de jogos, que segundo Lima (2022) são recursos que enriquecem o trabalho. Em decorrência desta pesquisa realizaremos as seguintes análises abaixo.

2 ANÁLISE DE DADOS

A análise de dados é uma etapa fundamental para compreender as práticas do ensino de matemática no Atendimento Educacional Especializado (AEE) para alunos com Transtorno do Espectro Autista (TEA). Para isso, foram coletados dados por meio de um questionário aplicado à professora durante as observações de aula, essas informações nos permitem identificar as

metodologias utilizadas e os desafios enfrentados no processo de ensino-aprendizagem. Durante o estágio supervisionado, tive a oportunidade de desenvolver uma regência focada no ensino de geometria plana com dois alunos autistas, o aluno A classificado como nível 1 e o aluno B classificado como nível 2, com duração de três dias consecutivos. O objetivo principal foi facilitar a compreensão das formas geométricas e suas propriedades, utilizando materiais manipuláveis.

O planejamento da aula incluiu atividades que combinavam o uso das figuras geométricas manipuláveis e associações visuais, como cores e texturas. A proposta era tornar o aprendizado mais concreto e envolvente. As atividades foram estruturadas para permitir que os alunos explorassem as formas, contassem lados e vértices, e relacionassem os conceitos geométricos a objetos do cotidiano.

No primeiro dia, introduzir o conceito das formas geométricas básicas: círculo, quadrado, triângulo e retângulo. Utilizei as figuras de forma tátil com cores diferentes, para que eles pudessem diferenciar pelo formato e cor de cada, após apresentar cada figura, comecei uma atividade visual, onde os alunos deveriam identificar as formas, o aluno A participou ativamente, identificando as formas rapidamente, mas o aluno B teve dificuldade em manter o foco.

No segundo dia, abordei as propriedades das formas, como número de lados e vértices. Realizei uma atividade prática onde os alunos contaram os lados e vértices de cada forma geométrica através do material tátil, que facilitou a concentração e interação dos mesmos. O aluno A mostrou interesse e conseguiu contar corretamente. O aluno B ainda enfrentou desafios, então introduzi jogos simples de associação entre formas e objetos que estavam ao seu redor, essa estratégia ajudou a manter sua atenção e facilitar a compreensão.

No terceiro dia, comecei revisando com eles tudo o que tinham aprendido sobre as formas geométricas nas aulas passadas. Após isso, propus uma atividade de fixação, onde os alunos deveriam identificar cada forma geométrica embaralhada em um quadro, contar quantas iguais tinham e classificar por seu nome. Como podemos observar nas figuras abaixo;

Figura 1: atividades dos alunos para fixação

a): Aluno A



b): Aluno B



Fonte: Próprio Autor

Em seguida, apliquei uma breve atividade de avaliação em que pedi que identificassem as formas e ligassem aos seus respectivos objetos semelhantes, essa atividade permitiu que ambos aplicassem o que aprenderam. O aluno A se destacou, organizando as formas e explicando suas características, o aluno B, com apoio, conseguiu participar e fez algumas associações corretas.

Figura 2: atividade avaliativa

c): Aluno A



d): Aluno B



Fonte: Próprio Autor

Ao longo dos três dias de regência, pude observar progressos significativos na compreensão das formas geométricas por parte dos alunos. O uso de materiais manipuláveis e atividades práticas foram essenciais para engajar ambos, embora cada um tenha respondido de forma diferente. Essa experiência reforçou a importância de um planejamento flexível e adaptado às necessidades individuais dos alunos, garantindo uma aprendizagem significativa e inclusiva.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A experiência de ensino de matemática no Atendimento Educacional Especializado (AEE) para alunos com Transtorno do Espectro Autista (TEA), destacou a importância de estratégias pedagógicas adaptativas para a aprendizagem em matemática. O uso de materiais manipuláveis e a associação de cores às figuras geométricas foram de suma importância para envolver os alunos e facilitar a compreensão do conteúdo abordado.

Os resultados mostram que, enquanto o aluno A teve um desempenho satisfatório, o aluno B enfrentou dificuldades significativas, ressaltando a necessidade de abordagens frequentes e diferenciadas que considerem o nível de autismo de cada estudante. Isso reforça a ideia de que a educação inclusiva deve ser flexível e atender às necessidades individuais.

Além disso, a pesquisa sublinha a importância de um diagnóstico contínuo das práticas pedagógicas e da formação contínua dos educadores, visando garantir a eficácia das metodologias utilizadas. Assim, este estudo não apenas atendeu ao objetivo de compreender o ensino de matemática, mas também forneceu percepções para aprimorar futuras intervenções. A inclusão de alunos com TEA deve ser uma prática efetiva que respeite as especificidades de cada aluno.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Lei nº 12.764, de 27 de dezembro de 2012. Institui a política nacional de proteção dos direitos da pessoa com transtorno do espectro autista. Brasília, DF: Presidência da República, 27 dez. 2012. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2012/lei/112764.htm. Acesso em: 31 ago. 2024.

BRASIL. Lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990. Dispõe sobre o Estatuto da Criança e do Adolescente e dá outras providências. Brasília, DF: Presidência da República, 13 jul. 1990. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/18069.htm. Acesso em: 31 ago. 2024.

LEMOS, J. M. O ensino da matemática para estudantes com transtorno do espectro autista (TEA). 2023. 50 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Plena em Matemática) – Universidade Federal do Pará, Castanhal, 2023.

LIMA, Izabely Peixoto de. Estratégias de ensino na aprendizagem da matemática para alunos autistas. 2022. 50 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Plena em Matemática) – Universidade Federal do Pará, Capanema, 2022.

NEGRÃO, A. M. S.; MENDES, R. F. S. Inclusão de alunos com transtorno do espectro autista no ensino e aprendizagem da matemática: um estudo de caso em dois municípios da Amazônia Paraense. 2022. 40 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Pará, Campus de Abaetetuba, Tomé-Açu, 2022.

ORGANIZAÇÃO MUNDIAL DA SAÚDE. Classificação Internacional de Doenças (CID-11). 2018. Disponível em: <https://icd.who.int/en>. Acesso em: 24 out. 2024.

PARÁ. Lei nº 9.061, de 21 de maio de 2020. Institui a política estadual de proteção dos direitos da pessoa com transtorno do espectro autista – PEPTEA. Assembleia Legislativa do Estado do Pará, Diário Oficial do Estado, Belém/PA, 21 maio 2020. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1TFQpaVfmWoDQljz2Ffk8t3A8pbvFKowy/view>. Acesso em: 01 ago. 2024.

SEABRA, R. S. Desafios da inclusão de alunos autistas: um estudo de caso sobre a metodologia de professores de matemática. 2022. 35 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2022.

A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA PARA EXPLORAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS NO ENSINO MÉDIO: UMA EXPERIÊNCIA DO PROGRAMA RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA

  10.56238/livrosindi202535-010

Ronald Sanches Garcia

E-mail: ronald.garcia@cameta.ufpa.br

Gustavo Delgado da Gama

E-mail: gustavo.gama@cameta.ufpa.br

Victor da Silva Pinto

E-mail: victor.pinto@cameta.ufpa.br

Sebastião Corrêa Valente

E-mail: sebastiao.valente3527@escola.seduc.pa.gov.br

Daniele Esteves Pereira Smith

E-mail: danielczyk@gmail.com

RESUMO

Quando relacionamos a utilização de recursos didáticos tecnológicos com o ensino da matemática, algo que se faz presente com frequência é a utilização de *softwares* que podem auxiliar os professores, ao mesmo tempo que torna as aulas mais atrativas para os alunos, dentre os principais destacamos o GeoGebra. Assim sendo, este texto busca apresentar detalhes a respeito de uma das atividades desenvolvida pelos residentes do núcleo de matemática do Programa Residência Pedagógica, esta que possuía o objetivo central de apresentar aos alunos do ensino médio o software e sua utilização. A metodologia utilizada se deu através de uma oficina pedagógica realizada com alunos do ensino médio de uma das escolas campo PRP. Por fim, evidenciamos os resultados obtidos através da aplicação da oficina onde os alunos puderam ampliar sua compreensão de conceitos e noções matemáticas através do GeoGebra.

Palavras-chave: TDICs. GeoGebra, Ensino de Matemática, Oficina Pedagógica, Programa Residência Pedagógica.

1 INTRODUÇÃO

Este texto possui o objetivo de apresentar em detalhes uma das atividades desenvolvidas durante o Programa Residência Pedagógica (PRP) pelos residentes do núcleo de matemática do campus universitário do Tocantins/Cametá.

O PRP, financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior (CAPES), possui como finalidade principal aprimorar a formação dos estudantes dos cursos de licenciaturas, promovendo a elaboração de projetos que enriquecem a prática pedagógica e encorajem os futuros professores a desenvolver uma relação ativa entre teoria e prática no exercício da docência. levar oficinas teórico- metodológicas para a sala de aula é um dos objetivos

centrais do subprojeto do núcleo de matemática do PR, a utilização de oficinas evidencia a importância da utilização de metodologias alternativas de ensino e facilita o entendimento do conteúdo pelos alunos.

Desse modo, trazer oficinas tecnológicas para a sala de aula pode ser crucial para tornar todos proficientes em tecnologia e equipar os alunos com as habilidades necessárias para construção da aprendizagem. Essas oficinas permitem que os alunos experimentem várias ferramentas e recursos tecnológicos, capacitando-os a usá-los criativamente e efetivamente para a construção do conhecimento.

Quando se trata de aprendizado e sala de aula, sem dúvidas a tecnologia está sempre ajudando nos dias de hoje os professores a conseguirem adaptar o ensino às necessidades individuais de cada aluno, se usada de forma correta dentro da sala de aula consegue fazer com que as atividades se tornem mais interativas entre o professor e o aluno, promove uma maior colaboração e nesse meio, a aprendizagem se torna muito mais envolvente.

Assim, fora proposto a realização da oficina pedagógica relacionada ao *software* GeoGebra, ministrada para os alunos do ensino médio de uma das escolas campo do Núcleo Matemática – Cametá do PRP. A oficina possuía como objetivo apresentar aos alunos o GeoGebra, suas funções e aplicações, a fim de ampliar as habilidades digitais e preparar os alunos em um mundo cada vez mais tecnológico.

Dessa forma, este texto expõe a importância e os benefícios da oficina apresentando o software Geogebra para os alunos do ensino médio, evidenciando também os resultados obtidos através das aplicações.

Este texto possui o objetivo de apresentar em detalhes uma das atividades desenvolvidas durante o Programa Residência Pedagógica (PRP) pelos residentes do núcleo de matemática do campus universitário do Tocantins/Cametá.

O PRP, financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior (CAPES), possui como finalidade principal aprimorar a formação dos estudantes dos cursos de licenciaturas, promovendo a elaboração de projetos que enriquecem a prática pedagógica e encorajem os futuros professores a desenvolver uma relação ativa entre teoria e prática no exercício da docência. Levar oficinas teórico-metodológicas para a sala de aula é um dos objetivos centrais do subprojeto do núcleo de matemática do PR, a utilização de oficinas evidencia a importância da utilização de metodologias alternativas de ensino e facilita o entendimento do conteúdo pelos alunos.

Desse modo, trazer oficinas tecnológicas para a sala de aula pode ser crucial para tornar todos proficientes em tecnologia e equipar os alunos com as habilidades necessárias para construção da aprendizagem. Essas oficinas permitem que os alunos experimentem várias ferramentas e recursos tecnológicos, capacitando-os a usá-los criativamente e efetivamente para a construção do conhecimento.

Quando se trata de aprendizado e sala de aula, sem dúvidas a tecnologia está sempre ajudando nos dias de hoje os professores a conseguirem adaptar o ensino às necessidades individuais de cada aluno, se usada de forma correta dentro da sala de aula consegue fazer com que as atividades se tornem mais interativas entre o professor e o aluno, promove uma maior colaboração e nesse meio, a aprendizagem se torna muito mais envolvente.

Assim, fora proposto a realização da oficina pedagógica relacionada ao *software* GeoGebra, ministrada para os alunos do ensino médio de uma das escolas campo do Núcleo Matemática – Cametá do PRP. A oficina possuía como objetivo apresentar aos alunos o GeoGebra, suas funções e aplicações, a fim de ampliar as habilidades digitais e preparar os alunos em um mundo cada vez mais tecnológico.

Dessa forma, este texto expõe a importância e os benefícios da oficina apresentando o *software* Geogebra para os alunos do ensino médio, evidenciando também os resultados obtidos através das aplicações sejam manipulados da maneira que o usuário desejar, o que possibilita que as produções matemáticas sejam feitas de forma dinâmica e interativa.

2 METODOLOGIA

A utilização de oficinas pedagógicas é uma estratégia didática, que visa o processo de construção e reconstrução do conhecimento, é um espaço onde o aluno pode descobrir, pensar, e criar conhecimentos a partir de experiências práticas e dinâmicas, que incentivam os alunos a serem cada vez mais participativos dentro de sala de aula.

A aplicação foi realizada nas turmas do 2º ano da escola campo do RP, a oficina foi previamente dividida em dois momentos, um primeiro momento onde seria apresentado o GeoGebra e suas funcionalidades e um segundo momento onde seria mostrado a utilização do *software* de maneira prática.

Iniciamos apresentando aos alunos a temática da oficina, seus objetivos e a forma que ela seria conduzida, fizemos a utilização de apresentação de slides para mostrar detalhadamente a interface e funções do GeoGebra, tanto no computador quanto na versão do *software* para celular, pois essa seria a versão que muitos alunos iriam utilizar para a prática no GeoGebra, devido à falta de um laboratório de informática na escola campo. A Figura 1 demonstra a aplicação da oficina em sala de aula.

Figura 1: Aplicação da oficina Geogebra



Fonte: Os autores

Para o segundo momento da oficina, preparamos alguns exemplos para desenvolvermos utilizando o GeoGebra junto dos alunos, onde mostrávamos os passos a passos para cada exemplo para que os estudantes conseguissem desenvolvê-los com êxito. Os exemplos selecionados foram os seguintes: Polígonos regulares e os círculos inscritos e circunscritos, função afim, função do 2º grau, círculo trigonométrico e progressão aritmética.

Após a construção dos referidos exemplos com os alunos, aplicamos uma atividade sobre progressão aritmética para que eles resolvessem de forma autônoma fazendo uso do GeoGebra, a escolha desse conteúdo para a aplicação se deu pelo fato de ser o assunto que vinha sendo trabalhado em sala de aula, após a aplicação da atividade, demos por encerrada a oficina ministrada.

Figura 2: Alunos da escola campo praticando no GeoGebra, durante aplicação da oficina.

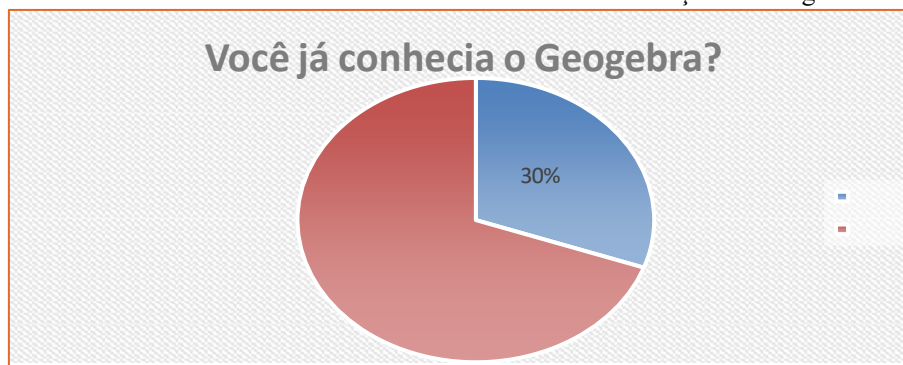


Fonte: Os autores

3 ANÁLISE DE DADOS

Após realizada a oficina, a coleta de dados se deu através de questionário e análise das atividades desenvolvidas, com o objetivo de apresentar aos alunos o software Geogebra como ferramenta pedagógica de ensino matemático. Atividade aplicada durante a execução do programa do Residência pedagógica, teve como início a apresentação do programa para os alunos, pois muitos ainda não conhecia o software, como demonstra o gráfico 1 seguinte.

Gráfico 1: Análise do conhecimento dos alunos em relação ao Geogebra



Fonte: Os autores

Os dados coletados foram realizados por meio de uma pesquisa quantitativa, através de questionário com perguntas selecionadas pelos residentes, com intuito de saber se os alunos já conheciam ou não o programa Geogebra. Desse modo, o gráfico exibe um total de 46 respostas, onde 32 alunos responderam não ter conhecimento prévio do programa, enquanto apenas 14 alunos apresentaram já ter uma breve compreensão do que se trata o software. Durante a apresentação introdutória do Software podemos demonstrar as funções e ferramentas do aplicativo para ajudar os estudantes no manuseio do programa, assim podemos fazer uso dessa ferramenta pedagógica como meio de ensino matemático para os alunos do ensino médio.

O uso da tecnologia é de suma importância para o ensino e aprendizagem da matemática, ela permite visualizar conceitos matemáticos de forma mais interativa. Desse modo, podemos destacar as dificuldades enfrentadas nas escolas sobre o uso das tecnologias, como a falta de laboratórios de informática pois, o ensino através de métodos tecnológicos se torna um recurso didático e dinâmico em sala de aula, para Sá e Machado

O uso das tecnologias na sala de aula vem se tornando uma ferramenta de grande importância, pois consegue auxiliar tanto o professor quanto ao aluno na explicação e na compreensão dos conteúdos. Com a tecnologia na aula os alunos sentem-se mais motivados a aprender e a partir disso o docente consegue ensinar de forma mais dinâmica e criativa (Sá; Machado, 2017, p.1).

A tecnologia como recurso didática se torna mais dinâmico e interativo, isso instiga o estudante a desenvolver atividades de matemáticas, mostrando a importância dessa ferramenta fazendo com que os alunos se sentem motivados a aprender.

Como resultado do questionário da pesquisa, ao perguntar a importância do uso da tecnologia para os estudantes do segundo ano do ensino médio, podemos destacar que a partir disso os alunos entenderam como a tecnologia é muito significativa e bastante importante, pois, podemos ter sala de informática, notebook e Datashow como ferramentas para ajudar no ensino da matemática e de outras áreas da educação. Desse modo, na figura 3 abaixo podemos observar alguma das respostas dos alunos.

Figura 3: resposta dos alunos no questionário

The image shows three identical copies of a questionnaire question, each with a handwritten response. The question is: "2) Você considera importante o uso da tecnologia nas aulas de matemática? Por que?". The response options are "Sim" (checked) and "Não".

Response 1: *Sim, pois usamos calculadora e jogos como geogebra para aprender e fazer ângulos.*

Response 2: *ajuda na diagnóstico e dá mais possibilidade de aprendizagem*

Response 3: *Pois se torna mais prático, a aula de hoje é um exemplo disso, aprendemos algo novo e mais prático.*

Fonte: Os autores

De acordo com a resposta do questionário pode-se observar que se obteve 100% de aproveitamento acerca da importância do uso da tecnologia no ensino da matemática. Como evidenciado na figura 6, os exemplos das respostas dos alunos destacam-se a tecnologia como elemento fundamental para o ensino e aprendizagem da disciplina, visto que é uma ferramenta que ajuda o professor na sua metodologia como também facilita o processo de aprendizado dos estudantes.

Na oficina, foram apresentadas algumas atividades realizadas nas turmas em que foram implementadas. A primeira atividade visava criar polígonos regulares e círculos inscritos e circunscritos, inicialmente, foram criados dois controles deslizantes; um para definir o número de vértices e outro para ajustar o tamanho do polígono. Após a construção do polígono foram desenhados o círculo inscrito e o circunscrito. Os alunos acompanharam o processo e, em seguida, realizaram exercícios conforme a explicação dos professores, atingindo o objetivo proposto.

Na segunda atividade, previamente foi desenvolvido a função do 2 grau com o objetivo de observar o comportamento do algébrico para o gráfico. De início, criamos três controles deslizantes para determinar o valor das variáveis, em seguida, na janela de álgebra no campo de entrada digitamos a função ($f(x) = ax^2 + bx + c$), para assim visualizarmos no gráfico. Seguidamente, no mesmo campo de entrada digitávamos o valor de delta para encontrarmos o discriminante e assim obtemos o seu valor e para encontrarmos sua raiz, utilizamos a ferramenta do software apropriada. Seguidamente, os alunos analisaram no gráfico e perceberam que a função é dada por uma parábola e sua concavidade é determinada pelo valor da variável a .

Na terceira atividade foi desenvolvido Progressões Aritméticas com intuito de demonstrar como podemos desenvolver a (P.A) utilizando o programa geogebra. No primeiro momento criamos três controles deslizantes, onde cada um deles iria determinar um valor, assim o primeiro controle determinaria o valor do primeiro termo (a_1), o segundo valor seria da (razão) e o terceiro o número total de termos. E por fim no campo de entrada digitamos o comando com os dados da fórmula da (P.A) para encontrar o termo desejado. Foi disponibilizado para os alunos cópias da tarefa pelos docentes, onde eles teriam que resolver questões através do geogebra e encontrar os termos da (P.A). Com auxílio dos professores, a maioria dos alunos conseguiu executar as perguntas presentes no exercício, finalizando assim com êxito o tema proposto.

Foram realizadas as três atividades com os alunos, com objetivo de explorar conceitos matemáticos por meio do geogebra. Essas atividades buscaram desenvolver noções e propriedades da matemática como a geometria e álgebra, por meio de uma abordagem prática e interativa, os alunos desenvolveram através do geogebra uma compreensão de conceitos e noções matemáticas. Buscando explorar de forma dinâmica e visual o geogebra, facilitando o conhecimento e proporcionando um aprendizado mais considerável para os alunos.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Previamente, destacamos a contribuição da oficina proposta para melhorar a compreensão no uso de tecnologias em sala de aula, foi possível observar que no início muitos tiveram bastante dificuldade para acompanhar os residentes, o que leva a entender que não estavam acostumados com atividades dessa origem. Porém pela pesquisa antecipadamente realizada, ficou evidenciado que existem alguns obstáculos para o uso do Geogebra nas atividades do cotidiano escolar, como por exemplo, a falta de estrutura para realizar tais atividades, foi perceptível dificuldades que alguns deles tinham em manusear o software, é fundamental que as escolas adotem o uso de

tecnologias para desenvolver diversas atividades, pois isso não apenas enriquece o processo de aprendizado, mas também prepara os alunos para os desafios do mundo moderno.

Podemos ver que foi possível trabalhar vários assuntos e que o Geogebra também contribuiu para otimizar o tempo, acreditamos que a aplicação das atividades pode contribuir com a melhoria do processo de ensino dos conteúdos abordados. E levar a garantia do despertar de interesse dos alunos em relação não só a tecnologias, mas através dela, acender o interesse nos conteúdos matemáticos durante as aulas.

Em síntese, foram desenvolvidas algumas atividades nas turmas do segundo ano do ensino médio, com objetivo de explorar os conceitos matemáticos por meio do software GeoGebra, acrescentando a aplicação de uma atividade relacionada a progressões aritméticas. Durante a elaboração de polígonos regulares e função quadrática, os alunos desenvolveram através do GeoGebra uma compreensão de conceitos e noções matemáticas bem significativa e profunda sobre o entendimento de resolução de problemas e interpretação de gráficos, essa abordagem dinâmica e visual facilitou o aprendizado e proporcionou uma experiência educacional mais enriquecedora.

REFERÊNCIAS

FERREIRA, R. C. Ensinando Matemática com o GeoGebra. Enciclopédia Biosfera. Goiânia: vol.6, N.10, 2010.

SÁ, Adriana Lourenço; MACHADO, Marilia Costa. O uso do software GeoGebra no estudo de funções. XIV EVIDOSOL e WI CILTEC online, junho de 2017.

Disponível em: <https://eventos.textolivre.orh/moodle/course/view.php?id=12>. Acesso em: 21 maio. 2024.

SIMON, Andrei Feltrin. O uso das tecnologias no ensino da Matemática em uma escola de Ensino Fundamental da rede municipal de Cocal do Sul/SC. 2013.

Monografia, Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 20

CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS MOBILIZADOS A PARTIR DO CULTIVO DA PIMENTA DO REINO NO QUILOMBO DE SANTO ANTÔNIO BAIÃO PARÁ

  10.56238/livrosindi202535-011

Marcelo Mendes Medeiros

E-mail: marcelo.medeiros.54379@gmail.com

Fábio Ramos Fernandes

E-mail: fabio.ramosfernandes@hotmail.com

Daniele Esteves Pereira Smith

E-mail: danielczyk@gmail.com

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo analisar quais conhecimentos matemáticos os agricultores da comunidade quilombola de Santo Antônio utilizam na produção da Pimenta do Reino. A comunidade fica localizada na zona rural do município de Baião no Baixo tocamtins/PA. Para o desenvolvimento desta pesquisa, utilizamos coleta de dados por meio de perguntas sobre o trabalho de alguns agricultores, que tem como cultura a Pimenta do Reino. Está pesquisa consistiu em um trabalho de cunho exploratório-descritivo onde buscou colher dados da matemática informal utilizada pelos produtores, conforme a perspectiva da Etnomatemática e matemática escolar. Nossos resultados mostram que a Etnomatemática reconhece que a matemática não é uma ciência universal, mas sim uma construção histórica, social e política que varia de acordo com o contexto e as necessidades de cada grupo. Logo, mesmo os produtores desconhecendo em partes a matemática escolar, estes utilizam saberes próprios para manejo da cultura.

Palavras-chave: Pimenta do Reino, Etnomatemática, Educação Matemática.

1 INTRODUÇÃO

A matemática faz parte da vida dos seres humanos desde o princípio, os cálculos eram concretizados através de pedras, amarrando com nós dentre outros. Pela sua importância, os números surgiram e recentemente chegaram a marcas conhecidas e usadas. “Com a ajuda dos números é possível fazer cálculos do simples ao complexo, que são explicados aos indivíduos nas escolas” (RINCÃO, SCALDELA, 2014, p. 120).

“A Etnomatemática executa a função de reconhecer e honrar a história, o costume, entendimento, a disposição estrutural e a concepção de outras culturas que constantemente é rejeitada de nossa comunidade e de suas realizações matemáticas” (KNIJNIK, 2012, p. 212).

Com isso, visto que a Etnomatemática dispõe dos costumes e história da cultura dos povos das comunidades, visando a relação entre a matemática formal ensinada nas escolas e a matemática informal que varia de profissão para profissão, realizamos pesquisas entre três agricultores chefes de família da comunidade quilombola de Santo Antônio, localizada na zona rural

do município de Baião-PA. “A partir do momento em que discutem o contexto sociocultural da escola, os professores passam a comunicar e a compreender a importância da sua identidade no meio social, o que os leva a um entendimento das definições” (BANDEIRA; GONÇALVES, 2020)

O objetivo deste trabalho foi apresentar os resultados de como os produtores de pimenta-do-reino da comunidade quilombola de Santo Antônio do município de Baião- PA utilizam os conhecimentos matemáticos informais em seu processo de produção. E com esse propósito específico, levantamos a seguinte questão para nortear a pesquisa: Quais conhecimentos matemáticos os agricultores da comunidade quilombola de Santo Antônio utilizam na produção de Pimenta do Reino?

Para nortear este trabalho, foram utilizadas algumas referências bibliográficas de alguns autores devido a relevância dos estudos no que diz respeito a Etnomatemática, um dos grandes percussores deste tema como D'Ambrosio, que é considerado de grande importância acerca da matemática utilizada em diferentes culturas e comunidades.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: temos as seções, referencial teórico que descreve os conhecimentos matemático utilizado pelo grupo cultural estudado que relacionam a Etnomatemática com o cultivo da pimenta do reino. Decorrente, é explicado a metodologia que foi utilizada no trabalho, seguida da metodologia, análise de dados seção em que são apresentadas as entrevistas de campo que conecta a matemática utilizada pelos agricultores no cultivo da pimenta-do-reino. Por fim, vem as considerações finais e as referências.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O primeiro autor a utilizar o vocábulo Etnomatemática foi Ubiratan D'Ambrósio, em uma conferência Anual da Associação Americana para o Progresso da Ciência. “A Etnomatemática inclui concepções matemáticas baseadas em procedimentos comparativos, classificatórios, quantificação, medição e raciocínio que englobam o caráter humano” (STRAPASSON, 2012).

A Etnomatemática é um modo inovador, natural e específico de uma pessoa, que é formada pelo contexto natural, social e cultural no qual se encontra, o que permite isolar os vínculos comuns a cada Etnomatemática e com toda simplicidade os torna únicos (VIEIRA, 2009, p. 27).

Strapasson (2012) argumenta que as teorias Etnomatemáticas incentivam e buscam saber como fazer matemática: uma motivação importante para o programa de pesquisa chamado Etnomatemática é tentar compreender os conhecimentos/ações matemáticas durante a história humana, analisados para distintos grupos, sociedades, povos e nacionalidades (STRAPASSON, 2012, p.12).

Esse conhecimento matemático estimula os professores que ingressam no espaço estudantil, mergulhando na realidade da vida, na cultura em que desempenham suas tarefas, a estimular o interesse e adquirir conhecimentos matemáticos. “A Etnomatemática, vai além do conhecimento matemático, precisa ser compreendida num sentido extenso e após comunicada aos indivíduos para que o conhecimento não contradiga o conhecimento matemático da comunidade local à qual os indivíduos pertencem” (SHINKAWA, 2012, p 39).

Transferir novos conhecimentos não significa que se deva abrir mão das próprias formas de saber e fazer matemática, é preciso estar aberto a possibilidades, isto é, “é preciso considerar as recentes maneiras de saber matemática que são decididas a circunstância em que o indivíduo esta, a deliberação para o uso depende dele” (SHINKAWA, 2012, p.41).

“A propagação desse novo entendimento aos estudantes se deve ao fato de que cada pessoa deve ser compreendida: uma entidade introduzida e suas realizações cognitivas e organizacionais não estão separadas do cenário histórico em que ocorre o processo de desenvolvimento constante” (D'AMBROSIO, 2008, p. 90). “A Etnomatemática é motivada pela busca da distinção entre saberes matemáticos ao longo da história humana que devem ser contextualizadas no dia a dia de um indivíduo para atender às essencialidades de um distinto grupo em uma distinta cultura” (D'AMBROSIO, 2001, p.27).

Cada pessoa é capaz de gerar e empregar sua própria matemática dentro de sua própria cultura, que enfatiza propriedades, linguagens, valores e convicções. “A matemática não é obrigatória, precisa ser renovadora e engrandecedora, pois é estudada à luz do contexto humano” (D'AMBROSIO, 2001). “A partir de tais apreciações, fica claro que determinado grupo cultural em sua identidade e maneiras de pensar e realizar o compele a desenvolver sua própria forma de adquirir conhecimentos matemáticos” (KNIJNIK, 2012).

Normalmente os educadores contextualizam o tópico com problemas enquadrados em ambientes reais e cotidianos. Infelizmente, inúmeros geram problemas e indagações artificiais e livres de contexto simplesmente como um instrumento recorrente para ensinar. “O que se denomina de situações e problemas “verdadeiramente reais” estão no mundo e não os inventados pelo educador” (D'AMBROSIO, 2008, p. 201). “Nesse contexto, essas difusões de informações relatam- se a contextos e problemas reais do dia a dia no conhecimento aglutinado dos cidadãos em distintos cenários culturais” (KNIJNIK; WANDERER; GIONGO, 2019)

Neste contexto, percebe-se a diversidade de matemática e de estilos de aprendizagem que existem dentro dos grupos culturais. Freire (2019), com base em D'Ambrósio, “divide os radicais da Etnomatemática em: “[...]: etno, matema e tica” significa dizer que “há diversos modos, métodos, habilidades para explicar, compreender, processar e conviver a realidade em vários contextos naturais

e socioculturais” (FREIRE, 2019, p.43). Lima (2018, p.30), no entanto, “considera essencial conhecer propostas sobre recursos pedagógicos que podem ser utilizados para aprimorar o ensino e a aprendizagem da matemática, essencialmente quando se trata do ensino fundamental, no qual há barreiras ao desenvolvimento de definições matemáticas”.

Para *Strapasson* (2012, p. 22), “a pesquisa neste campo precisa ser rígida para estabelecer novas oportunidades, objetivos e técnicas para a pesquisa pois: Qualquer ser humano desenvolve sabedoria que reflete em resultados comportamentais”. “Cada pessoa sua sabedoria e comportamento estão em gradual mudança e remetem ao que poderia ser denominado de real simbiose, dependência completa” (STRAPASSON, 2012, p. 22).

A modelagem ou a utilização de protótipos em matemática é algo mais perto da Etnomatemática e que a modelagem alicerçada na veracidade se converte no primeiro passo abstrato que segue o desenvolvimento de uma definição matemática. “A Etnomatemática e a etnociência são utilizações de modelos reais, onde a modelagem é concretizada utilizando outros códigos em vez da matemática formal” (RINCÃO; SCALDELA, 2014).

“O educador precisa adentrar no mundo sociocultural dos estudantes e participar de uma visão da realidade, no qual inúmeras vezes pode ter dificuldade de acompanhar. Com isso iniciaria uma brecha para um enfoque educativo e pessoal” (BANDEIRA; GONÇALVES, 2020).

“A Etnomatemática combina saberes e práticas próprias com uma coletividade multicultural, entendendo a educação por um procedimento integral com a participação de protagonistas empregando distintas táticas e tecnologias” (MOREIRA, 2009, p. 60).

“A interculturalidade pode ser compreendida mediante a disposição em cada cultura, com foco em um novo modo de refletir, de criação e de elos dialógicos de aprendizagem baseados na identificação do valor característico de cada cultura” (LIMA, 2017).

A educação intercultural aborda da relação do fundamento mútuo o que implica transformações que promovam oportunidades para todos, “respeitando a diversidade e remodelando a função dos professores que tentam implementar uma instrução mais dialógica que se combine com o conhecimento científico adquirido em ambiente acadêmico” (LIMA, 2017).

3 METODOLOGIA

As escolhas metodológicas deste trabalho, se deram considerando o objetivo da investigação feita, verificou-se a relação entre a matemática e as práticas agrícolas no cultivo da pimenta do reino buscando evidências a presença da matemática no cotidiano dos agricultores. Assim trata-se de um estudo de natureza qualitativa, delimitando uma pesquisa de campo descritiva, que buscou conhecer

e descrever todo o processo de cultivo, plantio e comercialização da pimenta-do-reino, produzido por três agricultores na zona rural do município de Baião no baixo Tocantins no Estado do Pará. A coleta dos dados se deu a partir da análise de um questionário em forma de entrevista estruturada, bem como observação feita no local do cultivo da pimenta- do- reino. A pesquisa em questão utiliza uma abordagem exploratório-descritiva. Portanto, a coleta de dados e a pesquisa de campo são utilizadas como métodos.

4 ANÁLISE DE DADOS

4.1 RESUMO DAS RESPOSTAS DO AGRICULTOR

O agricultor (1), tem 65 anos e cultiva pimenta do reino em um terreno ao fundo de sua residência há mais de 20 anos. A área do roçado tem seus quatro “aceiros” (lados) medidos de forma braçal, onde para cada braça tem-se 2,20 metros. Desse modo é feita a cubação (cálculo) da área, ou seja, a cubação é dada em tarefas. As mudas (sementes) são plantadas de dois a três meses após serem encanteiradas é retirada do canteiro e plantada diretamente na terra preparada e em seguida o produtor coloca as estacas de apoio em paralelo a mudas. O tempo de colheita de maior pico de produção é de 3 anos. O agricultor vende o kg de acordo com o preço sugerido no mercado por safra, ele afirma que se fazer a manutenção correta no cultivo não dá prejuízo. Ele possui ensino fundamental 2 incompleto e adquiriu experiência ao longo dos anos trabalhando com a cultura.

4.2 RESUMO DAS RESPOSTAS DO AGRICULTOR

O agricultor (2), tem 42 anos e cultiva pimenta do reino a mais de 15 anos em um terreno 4 km longe de sua residência. Ele informou ainda que o preparo de sua área foi realizado por um trator particular. Desse modo foi feita a cubação (cálculo da área) assim como a do agricultor (1), ou seja, a cubação foi medida em braças de 2,20 metros. Ele afirma que o plantio das mudas (semente) da pimenta do reino deve ser plantado em uma cova de dois palmos (40 cm) quadrado e com um palmo (20) de profundidade aproximadamente, essa cova deve ser cheia com materiais orgânicos curtido misturado com terra. O tempo de colheita de maior pico de produção é de 3 anos. Ele possui ensino fundamental 2 incompleto e adquiriu conhecimentos com o manejo da pimenta do reino com seus pais ao logo dos anos.

4.3 RESUMO DAS RESPOSTAS DO AGRICULTOR

O agricultor (3), tem 56 anos de idade, estudou até o 4º ano do Ensino Fundamental, ele cultiva a pimenta do reino nos fundos do seu terreno a cerca de 30 anos. Ele afirmou que calcula a quantidade de plantas cultivadas terrenos através do seguinte cálculo: em uma tarefa de

25 braços vezes 25 braços, de 2,20 m a braça (o que corresponde a aproximadamente 55 por e 55 m) num espaço de 1,80 metro entre plantas, multiplicam-se então 30 plantas por 30 plantas, chegando-se ao total 900 plantas por tarefa. Também nos informou que para o plantio da pimenta do reino são escolhidas as melhores mudas (sementes), como explicado anteriormente o tamanho da muda (semente) ideal o mínimo 3 brotos (gemas) devido ao enraizamento. Ele falou que quando a safra e de boa produtividade ele vende o kg pra outra cidade onde paga-se mais caro no kg. Segundo ele o lucro é maior, adquiriu experiência com a cultura ao longo do tempo.

Conforme é visto nas entrevistas, os agricultores tem percepção muito baixa da utilização da matemática formal, eles trabalham com ela de forma implícita e intuitivamente, baseando-se em suas experiências e nos conhecimentos adquiridos por meio da experiência no cultivo da pimenta do reino.

No decorrer das entrevistas, realizadas através de visitas feitas no quilombo, com o intuito de colher informações referentes as várias etapas de trabalho dos produtores chefes de família quilombola entrevistados. Com isso, foram observadas as atividades desempenhadas pelos agricultores quilombolas desde a produção de mudas, plantio, preparo da área, colheita e como embalar o produto para a comercialização. Em todos esses momentos de visitas empíricas, passou-se a conhecer as práticas matemáticas específicas deste tal grupo.

Tais práticas foram registradas e denominadas por: medidas de plantio, controle do tempo de produção, tempo de limpeza, contagem da colheita, organização da produção e os cálculos na comercialização da produção.

4.4 A MATEMÁTICA NO PREPARO DA ÁREA E NO PLANTIO DA PIMENTA DO REINO

Com base nas respostas dos entrevistados e na observação de seu trabalho em campo, percebeu-se que, no processo de preparar a terra para fazer o plantio, existem alguns detalhes importantes e a matemática que está presente faz toda diferença, apesar do seu uso parecer simples. Observando o preparo da terra, é possível notar algumas relações matemáticas que estão sempre presentes, conforme iremos observar no decorrer desta seção. Na preparação do solo para o plantio da pimenta do reino, destaca-se a distância ideal entre pés de plantas e as fileiras. Para a pimenta do reino, são feitas covas no solo em formato cúbico paralelas entre si, com distância que variam de 1,80 a 2,0 metros entre as fileiras, permitindo que as plantas cresçam sem disputar espaço. Pode-se extrair entre 15 a 20 mudas de cada planta matriz. A observação da forma como as mudas são plantadas revela a formação de linhas paralelas. Com isso, notam-se diferentes relações matemáticas existentes no cultivo da pimenta do reino.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conclui-se que o presente trabalho atingiu seu objetivo maior, pois responderam à questão norteadora do estudo. Durante as visitas a comunidade quilombola de Santo Antônio, especialmente aos plantadores de pimenta do reino, verificou-se os procedimentos e as formas empíricas de matemática informal utilizadas. Ao analisarmos as atividades dos agricultores na produção e comercialização de pimenta do reino, percebe-se que algumas etapas contêm conhecimento matemático escolar. Sendo assim, destacam-se: procedimentos de contagem; medição de comprimentos; medição de volume; medição de tempo; proporcionalidade; percentagem; comercialização, noção de paralelismo e noção de cálculo de área.

Constata-se que a Etnomatemática proporciona um conhecimento diversificado em nível cultural e amplo no que interessa a educação, sendo um instrumento que, mesmo praticado de formas simples, e até mesmo rudimentar, é absolutamente eficiente nas tarefas diárias daqueles que o utilizam.

O estudo em questão aproximou a Matemática das demandas locais, neste ponto destaca-se que tais conhecimentos populares também podem, e deve ser transformado em instrumentos pedagógicos pelos professores na sala de aula, o que poderia auxiliar o entendimento dos alunos no que se refere aos conceitos matemáticos.

Por fim, se faz necessário sugerir aos educadores interessados em Etnomatemática, mais especificamente, no que tange a dimensão educacional, que estes procurem compreender a realidade sociocultural e chegar à ação pedagógica de maneira natural mediante um enfoque cognitivo com base na fundamentação cultural da comunidade pesquisada. A principal contribuição desse estudo foi a de validar a Etnomatemática como sendo eficaz para auxiliar os processos de produção de diferentes grupos sociais. Para futuras pesquisas sugere-se ainda a ampliação da amostra pesquisada, a fim de adquirir uma sustentação maior dos resultados obtidos.

REFERÊNCIAS

- BANDEIRA, Francisco de Assis; GONÇALVES, Paulo Gonçalves Farias. Etnomatemática pelo Brasil: aspectos teóricos, ticas de matemática e práticas escolares. São Paulo: CVR, 2020.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Educação Matemática: da teoria à prática. 8. ed. Campinas/SP: Papirus, 2001.
- D'AMBRÓSIO, U. Educação matemática: da teoria à prática. 10. ed. São Paulo: Papirus, 2008.
- FREIRE, Paulo. Pedagogia do oprimido. 78. ed. Rio de Janeiro (RJ): Paz e Terra, 2019.
- GIL, Antônio Carlos. Como elaborar projetos de pesquisa. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2010.
- KNIJNIK, G. et al. Etnomatemática em movimento. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012.
- KNIJNIK, Gelsa; WANDERER, Fernanda; GIONGO, Ieda Maria. Etnomatemática em movimento. São Paulo: Autêntica, 2019.
- LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. Técnicas de Pesquisas. 6. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2006.
- LIMA, F. D. L. Etnomatemática no Garimpo: Uma proposta de ação pedagógica para o Ensino e aprendizagem de Matemática na Perspectiva da Resolução de Problemas. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN, 2018.
- LIMA, A. S. Licenciatura intercultural indígena da UEPA: saberes matemáticos e prática pedagógica. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas), Universidade Federal do Pará – UFPA, 2017.
- MOREIRA, D. Educação matemática para a sociedade multicultural. In: PALHARES, P. (org.). Etnomatemática: um olhar sobre a diversidade cultural e a aprendizagem matemática. Ribeirão, Portugal: Edições Húmus, 2009.
- STRAPASSON, A. G. Educação Matemática, Culturas Rurais e Etnomatemática: Possibilidades de uma Prática Pedagógica. Dissertação (Mestrado), Univates, Lajeado, 2012.
- VIEIRA, N. Para uma abordagem multicultural: o programa Etnomatemática. Nuno Vieira entrevista Ubiratan D'Ambrosio. Revista Lusófona, II, 2009.
- RINCÃO, E. L.; SCALDELA, D. A Etnomatemática na Escola do Campo: Compreendendo as Medidas de Superfície através das Unidades Agrárias. Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE. Paraná, 2014.

SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES APLICADA AO GPS

 Crossref  10.56238/livrosindi202535-012
Jamires Marques Castro Júnior

E-mail: jamires.junior@abaetetuba.ufpa.br

Felipe Monteiro Soares

E-mail: felipe.soares@cameta.ufpa.br

Ozias Alfaia da Costa

E-mail: ozias.costa@cameta.ufpa.br

Raiane Sena Pacheco

E-mail: raiane.pacheco@cameta.ufpa.br

Rubervaldo Monteiro Pereira

E-mail: rubenp@ufpa.br

RESUMO

Este trabalho explora o papel central da matemática aplicada, especialmente dos sistemas de equações lineares no funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS) que é ferramenta essencial em áreas como navegação, geolocalização, agricultura de precisão entre outras. Os sistemas de equações lineares são usados para calcular a posição exata entre o receptor e múltiplos satélites, resolvendo as distâncias e posicionamentos de pontos no espaço. Assim, este estudo visa aprofundar os fundamentos matemáticos do GPS, com ênfase nos métodos de cálculo de distâncias e coordenadas. A pesquisa inclui uma aplicação prática de coordenadas numéricas, reforçando a importância desses conceitos para entender o funcionamento do GPS. Conclui-se que os estudos contínuos desses fundamentos matemáticos são essenciais para o aprimoramento desse sistema, tecnologia tão necessária na sociedade moderna.

Palavras-chave: Sistema de Posicionamento Global, Matemática, Sistema de Equações Lineares.

1 INTRODUÇÃO

A matemática por muitos anos vem auxiliando o homem a suprir suas dificuldades. A necessidade de se localizar foi um grande desafio durante muito tempo, apesar de já existirem alguns meios arcaicos de localização. No entanto, esses recursos possuíam limitações que só foram resolvidas com a criação do *Global Positioning System*, comumente chamado de GPS.

Desenvolvido no período da Guerra Fria pelos Estados Unidos, o GPS tinha como principal objetivo criar um sistema de posicionamento global que permitisse às forças militares estadunidenses determinar a posição com grande precisão de seus navios, aeronaves e tropas terrestres em qualquer parte do planeta. A partir da década de 80 o GPS foi difundido para uso civil apesar de conter erros, como por exemplo, o atraso nas respostas que somente foram resolvidos a partir de 1990 com a técnica de correção diferencial (Pereira, 2014, p. 6).

Utilizado para localização de coordenadas geográficas planas e espaciais, o sistema GPS é constituído por três componentes principais: os satélites em órbita, as estações terrestres de controle e os receptores utilizados pelos usuários. Porém, tais componentes requerem diversos conceitos matemáticos para determinar com precisão a localização de um objeto em qualquer parte do mundo.

Esse sistema tem facilitado todas as atividades que necessitam de posicionamento, fazendo que algumas concepções antigas pudessem ser postas em prática. Um exemplo claro disso, é o que vem ocorrendo com o desenvolvimento da agricultura de precisão, um conceito estabelecido por volta de 1929, que só agora tem sido posto em prática, graças à integração de várias geotecnologias, dentre elas o GPS (Monico *apud* Stafford, 1996.2000, p.2)

A justificativa para o estudo sobre a fundamentação matemática do Sistema de Posicionamento Global (GPS) foi elaborada a partir de diversos aspectos que enfatizam sua importância e relevância. Uma delas é justificada pela crescente dependência da sociedade moderna em tecnologias de localizações precisas e confiáveis. Diante deste contexto, o presente trabalho tem como objetivo realizar um estudo teórico sobre os fundamentos matemáticos subjacentes ao funcionamento do GPS, enfatizando a aplicação de sistemas de equações lineares e a relevância das descobertas matemáticas para o desenvolvimento deste recurso tecnológico vital.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Definição 1 (Sistemas Lineares): Chamamos de *sistema de equações lineares* quando temos associado mais de uma equação linear, ou seja,

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}\tag{1}$$

Se temos m equações lineares e n incógnitas, dizemos que possuímos um sistema de equações de ordem $m \times n$.

Definição 2: Uma *solução* do sistema de equações lineares (1) é uma solução para todas as equações do sistema, ou seja, é uma sequência de números reais $(w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)$, que substituídos respectivamente no lugar das variáveis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, tornam verdadeiras cada uma das igualdades.

Existem diversos métodos de resolução de sistema de equações lineares, no entanto, a técnica mais usual para nossos propósitos é o *método de escalonamento*.

2.1 OPERAÇÕES ELEMENTARES SOBRE LINHAS

Para resolver sistemas de equações lineares, o método básico consiste em transformá-los em sistemas equivalentes mais fáceis de resolver. Isso é feito por meio de três *operações elementares*: **Troca** (alterar a posição de duas linhas); **Reescalonamento** (multiplicar uma linha por uma constante não nula) e **Substituição** (substituir uma linha pela soma dela com um múltiplo de outra).

Definição 3: Uma matriz $m \times n$ está na *forma escalonada (escada)* por linhas se ela satisfaz as seguintes propriedades:

- Todas as linhas nulas aparecem abaixo das linhas não nulas;
- Se as linhas i e $i + 1$ são sucessivas não nulas, o primeiro elemento não nulo da linha $i + 1$ está à direita do primeiro elemento não nulo da linha i ;
- Em uma coluna com um elemento pivô (primeiro não nulo), todos os elementos abaixo dele são zero.

Se, além disso, o primeiro elemento não nulo de cada linha é 1 e os demais elementos na coluna pivô são zero, a matriz está na **forma escalonada reduzida**. O *método de Gauss* aplica operações elementares até obter a **forma escalonada**, e o método de *Gauss-Jordan* continua até a **forma reduzida**.

2.2 FUNCIONAMENTO DO GPS

Segundo Pereira (2014), o *GPS* trata-se de uma constelação de 24 satélites, orbitando em torno da Terra a uma altura aproximada de 20.200 km acima do nível do mar, permitindo a receptores conhecer sua posição em qualquer lugar. Esses satélites se movem em seis planos orbitais, que foram escolhidos de tal maneira que, de cada ponto da Terra, sejam visíveis de cinco a oito satélites (Anton, 2007).

O sistema do GPS, está dividido em três partes, um segmento espacial (os satélites), um segmento de controle (as estações terrestres de gerenciamento) e um segmento do usuário.

O segmento espacial (os satélites):

É formado por vinte e quatro satélites, cada um pesa 1600 kg são movidos à luz solar trafegando em 6 órbitas cada uma com 4 satélites e espaçadas 60 graus uma da outra e inclinadas em 55 graus em relação ao plano que contém a linha do Equador, estáveis e predeterminadas em um período de 11 horas e 58 minutos. Isso assegura que todo ponto da superfície terrestre, em qualquer instante, esteja visualizado por pelo menos quatro satélites. Várias áreas da Terra são, por alguns momentos, visualizadas por até dez satélites acima da linha do horizonte. Cada satélite dispõe de quatro relógios de alta precisão dois de césio e dois de rubídio (Pereira, 2014, p. 6).

Já o segmento de controle:

É formado por 5 estações localizadas estrategicamente nas proximidades da linha do Equador: Colorado Springs (EUA) - principal estação que controla todo o sistema, Havaí (no Pacífico), Kwajalein (Ilhas Marshall, no Pacífico), Ilha de Ascensão (no Atlântico Sul), Ilha de Diego Garcia (no Índico). As estações rastreiam os satélites, atualizam as suas posições orbitais, calibram e sincronizam os seus relógios. (Pereira, 2014, p. 7).

Segundo Friedmann (2003), a função principal dessas estações é monitorar os sinais de todos os satélites, calcular dados orbitais precisos e ajustar o tempo de cada satélite individualmente. O último segmento são os receptores de sinais utilizados pelos usuários que:

Além de informar a latitude e longitude, o receptor poderá receber diversos dados que podem ser geográficos ou topográficos, e de acordo com a configuração pode ainda fornecer informações como: o nome de ruas, avenidas e edificações. Os receptores são classificados em geodésicos, topográficos ou de navegação (Maciel et. al, 2012, p 17).

Em apenas um décimo de segundo, o receptor calcula a distância ao satélite emissor. Multiplicando a velocidade da luz (cerca de 299.792.458 m/s) pelo tempo do sinal, obtém-se essa distância. Combinada à posição do satélite, isso forma a equação de uma superfície esférica imaginária.

A localização é dada por meio da latitude, longitude e elevação (coordenadas geográficas esféricas). É necessária muita precisão no tempo pois no sistema GPS, um erro compatível a um microssegundo leva a um erro de 300 metros. As unidades receptoras do GPS são absolutamente precisas podendo determinar sua posição com uma precisão menor que um metro (Wilberstaedt, 2022, p. 78-79).

Isso demonstra a sofisticação do GPS e como os fundamentos matemáticos, especialmente os sistemas de equações lineares, foram essenciais em seu desenvolvimento.

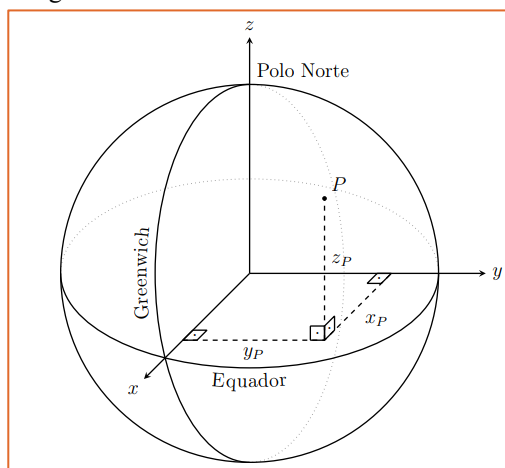
2.3 A MATEMÁTICA E O GPS

O correto funcionamento do GPS baseia-se no seguinte teorema, porém para a finalidade deste trabalho não será necessária sua demonstração.

Teorema: *Se quatro superfícies esféricas de centros não coplanares possuem intersecção, então essa intersecção é um único ponto.*

Suporemos que a Terra seja uma esfera e que tenhamos um sistema de coordenadas xyz , vamos fixar um sistema ortogonal cartesiano (coordenadas cartesianas) com origem O no centro da Terra, com o plano Oxy sendo o plano equatorial, o eixo Oz positivo orientado para o Polo Norte, o eixo Ox positivo cortando o meridiano de Greenwich e o eixo Oy positivo cortando meridiano de longitude 90° Leste conforme ilustra a figura 1.

Figura 1: Sistema de Coordenadas da Terra



Fonte: Wilberstaedt, 2022.

Supondo também que em relação a esse sistema de coordenadas, um certo barco tenha sua localização (x, y, z) desconhecida num certo instante t . Para simplificar os cálculos, iremos supor também que as distâncias sejam medidas em unidades iguais ao raio da Terra, de modo que as coordenadas do barco sempre satisfazem a equação,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (2)$$

O GPS utiliza uma triangularização e distâncias calculadas de quatro satélites para identificar as coordenadas (x, y, z) do barco no instante t . As distâncias são calculadas usando a velocidade da luz, (que é aproximadamente igual a 0,469 raios da Terra por centésimo de segundo) e o tempo que o sinal leva para percorrer a distância entre o satélite e o barco. Por exemplo, se o barco recebeu o sinal no instante t e o satélite indica que o sinal foi transmitido no instante t_0 , então a distância d percorrida pelo sinal é de

$$d = 0,469(t - t_0) \quad (3)$$

Em teoria, seria necessárias apenas três distâncias entre o barco e os satélites para determinar suas três coordenadas desconhecidas. No entanto, o barco não possui relógios suficientemente precisos para calcular o momento t de forma confiável. Logo, a variável t em (3) precisa ser considerada como uma quarta variável e, portanto, precisaremos de um quarto satélite. Suponha também que, além de transmitir o tempo t_0 , cada satélite também transmita suas coordenadas (x_0, y_0, z_0) naquele instante de tempo e, com isso, permita calcular d por

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (4)$$

Comparando os quadrados de (3) e (4) e arredondando para três casa decimais, obtemos a seguinte equação do segundo grau

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0,22(t - t_0)^2 \quad (5)$$

Como há quatro satélites, teremos dessa forma quatro equações nas quatro variáveis $(x, y, z \text{ e } t_0)$ do tipo (5) para cada um deles. Algebrizando as quatro equações de segunda ordem podemos obter um sistema de equações lineares que pode ser resolvido para as variáveis.

3 METODOLOGIA

3.1 APLICAÇÃO DO SISTEMA GPS

Exemplo Prático: Desejamos saber as coordenadas desconhecidas (x, y, z) de um barco que num instante de tempo t recebe os seguintes dados dos quatro satélites, com coordenadas medidas em raios terrestres e o tempo em centésimo de segundo a partir da meia noite:

Quadro 1: Posição dos satélites

Satélite	Posição do satélite	Tempo
1	(1,10; 2,00; 1,50)	1,05
2	(0,00; 1,22; 2,04)	0,52
3	(1,20; 1,55; 2,10)	1,35
4	(1,22; 0,00; 1,70)	0,23

Fonte: Autores, 2024.

Substituindo os dados do satélite 1 na equação (5) teremos

$$(x - 1,10)^2 + (y - 2,00)^2 + (z - 1,50)^2 = 0,22(t - 1,05)^2 \quad (6)$$

Expandindo a equação obtemos:

$$2,2x + 4y + 3z - 0,462t = x^2 + y^2 + z^2 - 0,22t^2 + 7,218$$

Realizamos os mesmos procedimentos para os dados dos outros três satélites completando então as quatro equações do seguinte sistema não-linear de equações:

$$2,20x + 4,00y + 3,00z - 0,462t = x^2 + y^2 + z^2 - 0,22t^2 + 7,217$$

$$2,44y + 4,08z - 0,229t = x^2 + y^2 + z^2 - 0,22t^2 + 5,590$$

$$2,40x + 3,10y + 4,20z - 0,594t = x^2 + y^2 + z^2 - 0,22t^2 + 7,852$$

$$2,44x + 4,00y + 3,40z - 0,101t = x^2 + y^2 + z^2 - 0,22t^2 + 4,367$$

Percebendo que os termos quadráticos em todas as quatro equações são os mesmos, de modo que subtraindo as três últimas equações da primeira obtemos o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} 2,20x + 1,56y - 1,08z - 0,233t &= 1,627 \\ -0,20x + 0,90y - 1,20z + 0,132t &= -0,635 \\ -0,24x + 4,00y - 0,40z - 0,361t &= 2,850 \end{aligned} \quad (7)$$

Como temos três equações com quatro variáveis distintas, podemos esperar que a solução geral de (7) envolva um parâmetro, o qual chamaremos de r . Resolvendo então x, y, z e t em termos de r e substituindo em qualquer uma das equações quadráticas originais, obtemos equações quadráticas em r , que podem, então, ser resolvidas para calcular os valores de x, y, z . Abaixo encontra-se a matriz na forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada do sistema de equação linear (8)

$$[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \quad -0,112 \quad 0,653 \quad -0,114 \quad -0,857 \quad -0,177 \quad 1,063]$$

dessa matriz obtemos

$$\begin{aligned} x &= 0,653 + 0,112r \\ y &= -0,857 + 0,114r \\ z &= 1,063 + 0,177r \\ t &= r \end{aligned} \quad (8)$$

Para encontrarmos r , basta substituímos as expressões encontradas anteriormente na equação (8), da mesma forma que poderiam ser substituídas em qualquer uma das quatro equações quadráticas dos satélites. Daí, simplificando obtemos

$$-0,164r^2 - 0,054r + 1,454 = 0$$

Resolvendo a equação, obtemos as seguintes soluções para r .

$$r = -3,146 \quad \text{e} \quad r = 2,817$$

Como $t \geq 0$, e $r = t$, escolheremos o valor positivo de r que substituindo em (8), nos fornece os valores de x, y e z

$$(x, y, z) = (0,968; 1,178; 1,562)$$

Esses números representam então as coordenadas do barco. Porém para fins de navegação essas coordenadas deveriam ser convertidas em Latitude, Longitude e Altitude (ou Elevação), no entanto, isso não será detalhado nesse trabalho.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A conclusão deste trabalho destaca a relevância fundamental da matemática aplicada, em especial, dos sistemas de equações lineares para o funcionamento do GPS. Esses sistemas de equações são responsáveis por calcular a posição de um receptor na superfície terrestre, determinando coordenadas de latitude, longitude e altitude com base nas distâncias entre o receptor e diversos satélites.

A abordagem matemática utilizada pelo GPS, que envolve operações como o método de Gauss e escalonamento de matrizes, demonstra como a matemática aplicada pode resolver problemas práticos complexos, como a determinação da posição em tempo real em qualquer lugar do planeta e essa conexão entre a matemática e a tecnologia ressalta a importância de um entendimento matemático sólido.

Portanto, este trabalho evidencia que o estudo contínuo e aprofundado da matemática aplicada é essencial para aprimorar sistemas tecnológicos que tenham um impacto significativo em nossa vida cotidiana, como o GPS, cujo estudo contínuo e aprofundado são fundamentais para o avanço dessa tecnologia tão presente na atualidade.

REFERÊNCIAS

- ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. Álgebra linear contemporânea. Porto Alegre: Bookman Editora, 2007.
- DE SOUZA, J. R. Matemática: Coleção Novo Olhar. 1. ed. [S.l.]: Ftd, 2010. ISBN 9788532273772.
- FRIEDMANN, R.M.P. Fundamentos de orientação, cartografia e navegação terrestre. Paraná: Cefet, 2003.
- IEZZI, G. et al. Matemática ciência e aplicações. 8. ed. [S.l.]: Atual Didáticos, 2019.
- MACIEL, Juliana Gonçalves; RIOS, Tamires de Aguiar; GODINHO, Darlan da Silva. Artigo apresentado à Revista Modelos. GPS: A antiga matemática na atual tecnologia. FACOS/CNEC Osório Ano 2 – Vol. 2 – Nº 2 – AGO/2012 – ISSN2237-7077.
- MONICO, J.F.G. Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS descrição, fundamentos e aplicações. 1. ed. Presidente Prudente: Editora UNESP, 2000.
- PEREIRA, E.H.U. Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí. A Matemática do GPS. Expedito Henrique Ulisses Pereira – Teresina: 2014.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Álgebra linear. [S.l.]: Pearson Makron Books, 1995. ISBN 9780074504123.
- WILBERSTAEDT, Giorgio. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática. Aplicações de sistemas de equações lineares em três diferentes contextos / Giorgio Wilberstaedt; orientador, Felipe Lopes Castro, Florianópolis, 2022.

CONTRIBUIÇÕES DAS EXPERIÊNCIAS VIVENCIADAS NO PIBID MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DOCENTE

  10.56238/livrosindi202535-013

Mateus Rodrigues Das Neves

E-mail: mateusdasneves555@gmail.com

Rubensvaldo Monteiro Pereira

E-mail: rubenp@ufpa.br

RESUMO

O presente relato socializa as contribuições do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência-PIBID na formação docente, vivenciadas durante as experiências enquanto sujeitos de um curso de licenciatura em matemática da UFPA campus Cametá/PA. Tais experiências foram vivenciadas após um período pandêmico, a partir de novembro de 2022, na EMEF Professora Nadir Filgueira Valente em Cametá/PA. Este relato se deu a partir das vivências em sala de aula, experiências durante as ações aplicadas e imersão no cotidiano escolar, bem como no desenvolvimento de competências, por exemplo, na elaboração de relatórios e comunicações científicas, que foram fatores que contribuíram para formação docente. A pesquisa tem caráter qualitativo e exploratória e o contexto das investigações foram as experiências vivenciadas no ambiente escolar. Durante o decorrer do projeto tivemos a oportunidade de vivenciar várias dimensões da realidade docente. Enquanto sujeitos da iniciação à docência pudemos experimentar a realidade escolar, desde o conhecimento da estrutura e funcionalidade até a prática rotineira da sala de aula. Enquanto acadêmicos de licenciatura em matemática o projeto nos oportunizou a prática e a experimentação de metodologias diversas enriquecendo as habilidades didático-pedagógicas. Aliado a isto, desenvolvemos competências na produção de comunicações científicas, como relatórios, artigos, palestras e publicação de trabalhos em e-book, bem como participação em eventos acadêmicos. Todas essas atividades resultam de um excelente trabalho desenvolvido no projeto pela equipe PIBID- Matemática. Portanto, participar do PIBID foi fundamental a formação profissional, pois durante este período as experiências e vivências foram enriquecedoras e essenciais para agregar patrimônio intelectual a formação docente.

Palavras-chave: PIBID, Formação docente, Ensino da matemática.

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho foi relatado as atividades desenvolvidas bem como o relato geral das experiências vivenciadas no PIBID/ UFPA núcleo matemática na contribuição da minha formação docente. Após passar por um período pós pandemia, no mês de novembro de 2022, fui aprovado na seleção do PIBID, e comecei a observar as aulas de matemática e desenvolver ações na EMEF Profa. Nadir Filgueira Valente em Cametá- PA. De fato, um dos principais elementos que diferenciam um ensino de qualidade é a formação de professores, levando em conta os percalços históricos que afetam o processo ensino-aprendizagem dos discentes dos cursos de licenciaturas, observa-se que com o decorrer dos anos a preocupação em melhorar o ensino e a formação de

professores teve uma significativa preocupação em solucionar este problema. Foi a partir de um decreto no ano de 2009 que se abriram as portas para a criação da Política Nacional de Formação Docente, o decreto de número 6.755 diz o seguinte:

Fica instituída a Política Nacional de Formação de Profissionais do Magistério da Educação Básica, com a finalidade de organizar, em regime de colaboração entre a União, os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, a formação inicial e continuada dos profissionais do magistério para as redes públicas de educação básica.

Partindo deste pressuposto para pôr em prática o que dizia o decreto, se fez necessário a criação do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência- PIBID que é um projeto de capes vinculado ao governo Federal.

O presente relato tem como objetivo socializar as contribuições do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - PIBID, na formação docente enquanto bolsista de licenciatura em matemática. Sabendo que um dos objetivos do programa é contribuir para a articulação entre teoria e prática necessárias à formação dos docentes e proporcionar a inserção no cotidiano das escolas públicas da educação básica, acredito que o PIBID contribui para a correção das deficiências citadas no texto e com os avanços que o país tanto precisa no que se refere à educação e à formação docente de qualidade.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O Projeto Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência-PIBID é um projeto de capes vinculado ao Ministério da Educação do Governo Federal. O projeto tem por finalidade promover a formação inicial de professores para a educação básica o programa apoia estudantes dos cursos de licenciatura plenos em instituições federais e estaduais de ensino superior a concluírem seus cursos e ingressarem no exercício docente da educação básica.

Segundo dados da capes, os objetivos do programa são: incentivar a formação de professores da educação básica em nível superior e fortalecer os cursos de licenciatura das IES participantes; promover a integração entre a educação superior e a educação básica, estabelecendo a colaboração mútua entre IES, redes de ensino e escolas em prol da formação inicial de professores; enriquecer a formação teórico-prática de estudantes de cursos de licenciatura etc.

O projeto de iniciação à docência pelo fato de ter uma duração de dezoito meses permite vivenciar o locus da futura profissão, pois me possibilita ter acesso ao local onde serei profissional, sem contar com o laço de afetividade que criamos com os alunos pelo fato de estar diariamente presente na escola. Além do mais possibilita participar e lidar com as limitações da escola pública percalços e dificuldades que o professor encontra diariamente.

A experiência como bolsista PIBID contribuiu na percepção da complexidade do processo educativo fazendo vir à tona a importância do ensino-aprendizagem de qualidade fazendo com que o aluno aprenda aquilo que está sendo trabalhado em sala de aula. Durante os dezoito meses de experiências vivenciadas na escola eu pude analisar a importância de novas metodologias para ensinar matemática, sempre nas aplicações de ações desenvolvidas na escola buscava não me prender ao método tradicional e sim a novos recursos como o lúdico, ou seja, o que eu aprendi durante a faculdade chamada de teorias sobre novos métodos de ensinar matemática eu pude pôr em prática no projeto de iniciação à docência.

Formosinho (2009) afirma que a etapa significativa da formação docente ocorre na escola, fato que o projeto oportunizar aos acadêmicos, mesclando o conhecimento teórico com o seu uso no campo prático, acrescentando que a formação se inicia com a aprendizagem do ofício de aluno e com a observação dos professores no qual o educando incorpora práticas que consideram corretas, em sua atividade profissional.

Nesse sentido o lúdico no ensino da matemática é fundamental como uma nova forma de metodologia para ensinar matemática, pois proporciona ao aluno uma visão crítica, desperta o raciocínio lógico e prende a atenção do aluno na sala de aula, cabe aos professores da educação básica buscarem meios e fazer esta associação ao lúdico com o ensino da matemática.

Para Ubiratan D'Ambrósio (1996. Pag. 64) “os professores precisam aproximar a disciplina do que é espontâneo, deixar a criança a vontade, propor jogos, distribuir balas, objetos, para que o aluno se sinta bem”. A criança adquire habilidades para a matemática em casa, no meio em que vive. Cada um tem um modo próprio de aplicá-la. Só que na escola dizem que a matemática não se faz do jeito de casa. Rechaçam esse conhecimento que o aluno traz e isso cria conflito.

Segundo o autor para a prática docente é necessário que haja atividade que estimulem os alunos a querer aprender, que os docentes busquem atividades que prenda a atenção do aluno, e o projeto de iniciação à docência tem essa finalidade de proporcionar recursos lúdicos como ferramenta de ensino na disciplina matemática.

O projeto em suma foi muito importante na minha formação, pois além de me proporcionar aplicar os métodos que eu aprendi no decorrer da minha graduação, me enriqueceu como pesquisador, pois sempre buscava livros e artigos para fazer um bom plano de aula e executar as ações com êxito. Tive um ganho significativo na área de produção acadêmica e ao mesmo tempo na produção científica o qual me proporcionou uma ambientação em eventos de caráter acadêmico científico.

Uma boa formação de um educador matemático não pode ser uma prática limitada a refletir sobre a matemática e seus processos de elaboração, como nos diz D'Ambrósio (1993), "torna-se

necessário refletir para além desses conhecimentos, sobre outras questões que se colocam, dentre essas a formação do professor como pesquisador".

O autor enfatiza a importância de sermos professores pesquisadores, e o projeto ele proporciona essas vivências de estar presente na pesquisa e isso incentiva o futuro professor a ir atrás de novos métodos, publicar, participar de eventos. O PIBID ele promove ao aluno ainda na graduação que ele seja um professor diferenciado, ou seja, que seja um docente que sempre busque novos métodos para ensinar matemática de forma enriquecedora e que prenda a atenção do aluno.

3 DESENVOLVIMENTO

Acredito que para desenvolver um excelente trabalho precisamos ter um elo, no caso do PIBID este ele é dado pela contribuição do Bolsista, Supervisor, direção escolar e Coordenador do projeto. Quando adentrei no ambiente escolar tive a oportunidade de vivenciar todos os departamentos da escola, tive acesso ao Projeto político pedagógico da escola-PPP o qual foi fundamental para me ambientar no espaço em que eu iria desenvolver as atividades.

Apesar dos percalços que existem nas escolas públicas, com a orientação da supervisora, que era docente na própria escola, comecei a observar a professora de matemática na instituição de ensino básico. A docente possui um amplo domínio no conteúdo programático e adota metodologias diferenciadas, por conta dos contratempos da escola e muitas das vezes pela falta de tempo a docente acaba se prendendo muito ao método tradicional, porém com as ações que eu desenvolvi no PIBID acabávamos utilizando outros métodos de ensino no qual era sempre elogiado pela docente.

Essa admirável professora buscava uma relação de ajuda mútua e reciprocidade com a turma. Marchesi e Martin (2003, p. 111) comentam a necessidade de criação de um ambiente propício a aprendizagem, afirmando:

Os sentimentos de afeto entre o professor e seus alunos contribuem para criar uma atitude positiva em relação à aprendizagem. Os bons professores procuram comunicar entusiasmo e carinho para seus alunos. A paciência, a perseverança, o apoio à autoestima dos alunos e o senso de humor são outras das características apontadas nas várias intervenções que estão presentes quando existe uma relação de respeito e empatia com os estudantes.

Todos esses conhecimentos que a minha supervisora possui e compartilhou comigo também foi um dos fatores que contribuiu com a minha formação docente, desde o modo a se portar em sala de aula, como técnicas de postura na apresentação de trabalhos além de me passar confiança nas horas em que eu a substituí na escola. O coordenador do projeto teve um papel

significativo na contribuição da minha formação principalmente no que se refere a publicação e ambientação em eventos de caráter científico. Ele sempre me motivava a participar dos eventos, enviar trabalhos para publicação e tudo isso fazia eu ser um pesquisador, a ter gosto pela escrita, fazendo com que eu tenha uma enriquecedora linguagem científica.

Todas essas contribuições traçaram um perfil para mim enquanto futuro professor de matemática, pelo fato de eu estar ligado a pesquisa, enquanto futuro professor já terei uma bagagem sobre o uso de novos métodos ao ensinar matemática, usar outros recursos como o lúdico ou jogos digitais para diversificar o ensino, sem contar na linguagem científica que aprendi durante a Vicência no PIBID. Além do fato de eu ter vivenciado o “chão da escola”, já tenho noção dos percalços que ocorrem na escola pública e terei de adaptar as aulas com os recursos disponibilizados.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Durante o decorrer do projeto tivemos a oportunidade de publicar artigos, ministrar palestras e publicar trabalhos no formato de e-book. Todas essas atividades representam o resultado de um excelente trabalho desenvolvido no projeto é a apropriação de todos os conhecimentos repassados pela supervisora e pelo coordenador do PIBID.

Tabela 01: tabela das atividades publicadas em eventos nacionais e regionais

BOLSISTAS	EVENTOS
Mateus Rodrigues Das Neves Jamile Ferreira Ribeiro Maísa Pereira Da Silva	Evento: IX ENALIC Local: UNIVATES Local: Lajeado-RS Modalidade: comunicação oral modalidade online Título: Jogo trilha dos produtos notáveis e fatoração: experiências PIBID/ UFPA na EMEF Nadir Filgueira Valente em Cametá-PA Autores: Mateus Rodrigues das Neves, Jamile Ferreira Ribeiro, Maísa Pereira da Silva, Betânia de Almeida Prestes e Rubenvaldo Monteiro Pereira Data da apresentação: 07/12/2023
Letícia Viana e Silva Mateus Rodrigues das Neves	Evento: II seminário integrado PIBID- PRP (SEPEDUC 2023) Local: Universidade Federal do Pará Lugar: Belém-PA Período: 11 a 13 de dezembro de 2023 Modalidade: Poster Título: O lúdico no ensino da matemática: experiências PIBID/UFPA na EMEF Nadir Filgueira Valente em Cametá-PA. Autores: Letícia Viana e Silva, Mateus Rodrigues Das Neves, Betânia de Almeida Prestes e Rubenvaldo Monteiro Pereira Data da apresentação: 13/12/2023

Mateus Rodrigues das Neves	Evento: I CONENORT-PRP Local: Instituto Federal da Bahia- IFBA Lugar: Salvador-BA Período: 15 a 18 de maio de 2024 Modalidade: comunicação oral modalidade online Título: O ensino da trigonometria por meio de jogos: experiências PIBID/UFPA na EMEF Nadir Filgueira Valente em Cametá-PA Autores: Mateus Rodrigues das Neves e Rubenvaldo Monteiro Pereira Data da apresentação: 16/05/2024
Letícia Viana e Silva Mateus Rodrigues das Neves Betânia de Almeida Prestes Rubenvaldo Monteiro Pereira	Tema: O lúdico no ensino da matemática: experiências PIBID/ UFPA na EMEF Nadir Filgueira Valente em Cametá-PA. Tipo de publicação: E-book Editores: Editaedi, Anais SEPEDUC 2023.

Fonte: autoral

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização destas atividades me possibilitou uma reflexão sobre o uso de metodologias mais dinâmicas e interativa, uma aprendizagem como atividade contínua. Tem-se a utilização da prática como objeto de reflexão e de aprimoramento na construção do conhecimento.

Foi observado que o uso da ludicidade, trazer ao concreto o conhecimento matemático, mostra-se como uma alternativa para contornar a falta de interesse dos alunos e suas dificuldades no que diz respeito aos conceitos apresentados. Por meio de jogos, proporciona ao estudante sua própria construção do conhecimento, interagindo com o professor e outros alunos ao seu redor e trazendo a matemática à sua realidade.

As atividades desenvolvidas em sala de aula trouxeram-me aspectos positivos, em que destacamos a introdução das atividades desenvolvidas durante o projeto, onde viabilizou uma dimensão lúdica ao processo de aprendizado. Essa abordagem aumentou a motivação dos alunos em relação à matemática, tornando o aprendizado mais envolvente. Também constatamos as dificuldades dos alunos durante as atividades e através destas dinâmicas tentávamos sanar essas barreiras em relação a disciplina matemática.

O Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência-PIBID/UFPA matemática nos proporcionou, enquanto bolsistas, a oportunidade de estarmos contribuindo por meio de projetos, aulas e orientações no processo ensino- aprendizagem dos alunos e ajuda na contribuição da escola a melhorar seu desempenho em projetos nacionais, como o IDEB.

A importância do PIBID para mim enquanto bolsista foi de suma importância, pois contribui de forma significativa ao nosso processo de formação, possibilitando, enquanto acadêmicos de graduação, que eu tenha experiência de sala de aula por meio de projetos para o ensino escolar, tendo experiências e práticas educacionais de docentes em formação; contribuindo

para refletir possibilidades de superar os desafios encontrados ao ensinar matemática para alunos que, por ventura, tenham dificuldade em desenvolver conceitos básicos da matemática escolar.

Portanto, foi fundamental a minha participação no projeto, aprendi durante esse período como me portar em sala de aula, técnicas de como escrever artigos para a publicação, participei de um evento nacional que foi o ENALIC em Lajeado-RS, vivenciei essas que são primordiais no período acadêmico. Sem contar o carinho e respeito que tive pelos meus alunos e pela minha supervisora. Só tive a ganhar participando do PIBID e de fato pude contribuir um pouco com o processo ensino aprendizagem dos alunos.

REFERÊNCIAS

- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC, 2018.
- CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. *Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID*. Disponível em: <http://www.capes.gov.br/educacao-basica/capespibid>. Acesso em: 05 nov. 2024.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Educação Matemática: da teoria à prática*. 21. ed. Campinas, SP: Papirus, 1996.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. *Pro-Posições*, v. 4, n. 1(10), 1993.
- BRASIL. Decreto nº 6.755, de 29 de janeiro de 2009. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2009/Decreto/D6755.htm. Acesso em: 06 nov. 2024.
- HOLANDA, Dorghisllany Souza; SILVA, Camila Sibeles Marques da. A contribuição do PIBID na formação docente: um relato de experiência. In: *Encontro Nacional de Educação Matemática*, Curitiba, 2013.
- MARCHESI, Álvaro; MARTÍN, Elena. *Qualidade de ensino em tempos de mudança*. Porto Alegre: Artmed, 2003.
- NASCIMENTO, Francisco Jeovane do et al. A contribuição do PIBID na formação docente: implicações das experiências vivenciadas no contexto do programa para o desenvolvimento profissional e a inovação das práticas educativas. *Linguagens, Educação e Sociedade*, Teresina, 2015.
- NEVES, Mateus Rodrigues das et al. Jogo trilha dos produtos notáveis e fatoração: experiências PIBID/UFPA na EMEF Profa. Nadir Filgueira Valente em Cametá-PA. In: *Anais do IX ENALIC*, Campina Grande: Realize Editora, 2023. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/104181>. Acesso em: 14 out. 2024.

MEDIDAS MATEMÁTICAS NA PRODUÇÃO DE FARINHA: UMA ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE AS MEDIDAS TRADICIONAIS E AS INTERNACIONAIS

  10.56238/livrosindi202535-014

Marcos Vinicius Ribeiro Machado

E-mail: marcosjoker4@gmail.com

Wesley Dantas Correa

E-mail: wesley.dantas.correa@gmail.com

José Renato Ferreira Alves da Cunha

E-mail: jrecunha@gmail.com

RESUMO

Este estudo tem como objetivo principal analisar e comparar as medidas matemáticas tradicionais utilizadas na produção de farinha de mandioca na comunidade quilombola de Joana Peres, no Pará, com as medidas padronizadas internacionais. A pesquisa adota uma abordagem qualitativa e exploratória, baseada em observações de campo, entrevistas com os produtores locais e levantamento bibliográfico. Através desta análise, buscamos compreender como as práticas culturais influenciam o uso de medições tradicionais, ao mesmo tempo em que avaliamos a aplicabilidade e as vantagens de implementar padrões internacionais. Os resultados destacam a relevância das tradições matemáticas locais para a sustentabilidade da produção e apontam para desafios e oportunidades na harmonização dessas práticas com normas globais.

Palavras-chave: Medidas tradicionais, Farinha de mandioca, Matemática na agricultura, Comunidade quilombola, Padrões internacionais.

1 INTRODUÇÃO

A produção de farinha de mandioca é uma prática ancestral que envolve conhecimentos tradicionais profundamente enraizados em comunidades rurais do Brasil, como a Comunidade Quilombola de Joana Peres. Nesse contexto, a matemática desempenha um papel fundamental, tanto na padronização dos processos de produção quanto na comparação entre as medidas tradicionais utilizadas pelos moradores e os padrões internacionais.

Entender as diferenças e semelhanças entre essas medidas é crucial para valorizar o saber local e, ao mesmo tempo, garantir que a produção da farinha possa se inserir de forma competitiva em mercados mais amplos. Segundo Sousa (2010, p. 123), “A padronização internacional não deve apagar a singularidade dos métodos tradicionais, mas sim, criar uma ponte entre o local e o global, permitindo que os saberes ancestrais tenham espaço em mercados globais.” Dessa forma, torna-se necessário o uso de ferramentas matemáticas para harmonizar esses dois mundos, preservando a tradição e assegurando a sustentabilidade econômica.

Este estudo tem como objetivo analisar comparativamente as medidas utilizadas na produção tradicional da farinha de mandioca na Comunidade Quilombola de Joana Peres com as medidas adotadas nos padrões internacionais. A investigação busca, além de identificar as diferenças, sugerir maneiras pelas quais essas práticas podem coexistir, favorecendo o desenvolvimento local sem comprometer a identidade cultural da comunidade.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O presente estudo tem como foco principal a análise das medidas matemáticas utilizadas na produção da farinha de mandioca na Comunidade Quilombola de Joana Peres e sua comparação com os padrões internacionais. Nesse sentido, é fundamental compreender como os conceitos matemáticos são aplicados nas práticas tradicionais e como esses processos podem ser relacionados ao conhecimento formal. Essa conexão entre o saber tradicional e o científico é amplamente discutida na literatura sobre etnomatemática, um campo que valoriza o uso da matemática em contextos culturais específicos (D’Ambrósio, 2002).

Segundo D’Ambrosio (2002), a etnomatemática busca entender como os diferentes grupos culturais desenvolvem e utilizam conceitos matemáticos próprios para resolver problemas em seus contextos locais. No caso da produção da farinha de mandioca, as medidas tradicionais, como “Lata” e “alqueire”, são exemplos de unidades usadas pela comunidade para medir a quantidade de mandioca e farinha. Essas unidades muitas vezes não seguem os padrões estabelecidos pelo Sistema Internacional de Unidades (SI), mas têm precisão e relevância dentro do contexto local, o que reforça a importância de valorizá-las e compreendê-las.

Figura 1: Frasco



Fonte: autor, 2024.

Além disso, Sousa (2010) discute a importância da padronização das medidas e de como essa padronização pode facilitar a integração das comunidades tradicionais ao mercado formal. No entanto, o autor também ressalta que essa padronização não deve ignorar o contexto cultural e as necessidades da comunidade local, mas sim buscar uma adaptação que respeite os saberes ancestrais. Conforme citado anteriormente, “A padronização internacional não deve apagar a singularidade dos métodos tradicionais, mas sim, criar uma ponte entre o local e o global, permitindo que os saberes ancestrais tenham espaço em mercados globais” (Sousa, 2010, p. 123).

Adicionalmente, a produção de farinha de mandioca em Joana Peres envolve uma série de processos, como a colheita, a pesagem e a secagem da mandioca, que podem ser analisados através de conceitos matemáticos relacionados à medição, proporção e conversão de unidades. Segundo Silva (2015), a matemática é uma ferramenta poderosa para otimizar processos de produção ao oferecer métodos mais precisos de medição e análise de dados, o que pode, inclusive, melhorar a produtividade e a qualidade dos produtos.

Dessa forma, o referencial teórico utilizado no presente trabalho fundamenta-se na etnomatemática e na discussão sobre a padronização de medidas, enfatizando a necessidade de preservar o conhecimento tradicional enquanto se estabelece um diálogo com o mundo contemporâneo. Isso contribui para que o saber tradicional da produção de farinha de mandioca seja não apenas preservado, mas também aprimorado e reconhecido no contexto econômico global.

3 METODOLOGIA

Este estudo foi desenvolvido com base em uma abordagem qualitativa, focando na análise comparativa entre as medidas tradicionais utilizadas pela Comunidade Quilombola de Joana Peres na produção de farinha de mandioca e os padrões estabelecidos pelo Sistema Internacional de Unidades (SI). O objetivo foi compreender como as práticas tradicionais se relacionam com as medidas formais e identificar possíveis pontos de convergência e divergência.

3.1 TIPO DE PESQUISA

A pesquisa seguiu o modelo de estudo de campo etnográfico, no qual foram observadas as práticas tradicionais de produção de farinha, com ênfase nas unidades de medida utilizadas pela comunidade. A etnografia foi escolhida por permitir uma imersão na realidade local, favorecendo uma compreensão mais profunda do uso cotidiano das medidas. Além disso, foram utilizados elementos da pesquisa documental para análise das normas internacionais de medidas, comparando-as com os métodos tradicionais.

3.2 COLETA DE DADOS

Os dados foram coletados durante visitas de campo à comunidade de Joana Peres, onde foram realizadas observações participativas e entrevistas semiestruturadas com os produtores locais de farinha de mandioca. Os sujeitos participantes da pesquisa foram membros da comunidade que atuam diretamente na produção, sendo selecionados por meio de amostragem intencional. Os entrevistados foram produtores com vasta experiência na prática.

Durante as entrevistas, os participantes descreveram os processos de produção e as unidades de medida utilizadas, como o “meio frasco”, o “frasco” e a “lata”. A coleta de dados também incluiu a medição física dos recipientes e instrumentos utilizados, a fim de comparar essas medidas com os padrões do SI.

3.3 INSTRUMENTOS UTILIZADOS

Os principais instrumentos de coleta de dados foram o gravador de áudio, para registrar as entrevistas, e uma caderneta de campo, onde foram anotadas as observações das práticas produtivas. Para medir e comparar as unidades de medida tradicionais, foi utilizado um conjunto de instrumentos padronizados, como balanças digitais e réguas métricas, que possibilitaram a conversão das medidas locais para o sistema métrico decimal.

4 ANÁLISE DE DADOS

A pesquisa de campo realizada na Comunidade Quilombola de Joana peres revelou a importância das medidas matemáticas tradicionais na produção de farinha de mandioca, comparando-as com o Sistema Internacional de Unidades (SI). As unidades de medida locais, como o "frasco" e a "lata", são amplamente utilizadas e transmitem, de forma oral, conhecimentos passados entre gerações. Embora não sigam uma padronização formal, essas medidas apresentam consistência interna e funcionalidade no contexto comunitário. A seguir imagens da unidade de medida Frasco ou litro.

Figura 2: Meio Frasco



Fonte: autor, 2024.

Ao comparar essas unidades tradicionais com o SI, surgem algumas discrepâncias, especialmente em relação à precisão. Por exemplo, o "pote" pode variar de tamanho entre produtores, o que cria desafios para a comercialização em mercados externos, onde a padronização é exigida. No entanto, dentro da comunidade, essas medidas são vistas como eficazes e culturalmente significativas. A persistência das medidas tradicionais não está ligada apenas à funcionalidade, mas também ao seu valor simbólico e cultural. Para os produtores locais, essas práticas são uma parte essencial de sua identidade, e muitos relutam em substituí-las por medidas padronizadas. Há uma tensão entre a preservação dessas tradições e a necessidade de adaptação para atender às exigências do mercado moderno.

A análise sugere que uma abordagem equilibrada pode ser a melhor solução. A comunidade pode continuar utilizando suas medidas tradicionais para o consumo interno, enquanto gradualmente adota unidades padronizadas, como o quilograma, para atender ao comércio externo. Isso garantiria que a produção de farinha de mandioca da comunidade se torne mais competitiva, sem comprometer a identidade cultural local.

Em suma, a integração cuidadosa das medidas tradicionais com os padrões do SI pode proporcionar à comunidade de Joana Peres oportunidades de crescimento econômico, preservando, ao mesmo tempo, seus valores culturais. A capacitação e a educação desempenharão papéis fundamentais nesse processo de transição, permitindo que a comunidade fortaleça sua presença tanto no mercado interno quanto externo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo buscou analisar e comparar as medidas matemáticas tradicionais empregadas na produção de farinha de mandioca pela Comunidade Quilombola de Joana Peres com as medidas padronizadas do Sistema Internacional de Unidades (SI). A pesquisa revelou que, embora as práticas locais utilizem medidas baseadas em conhecimento transmitido de geração em geração, estas apresentam uma consistência funcional no contexto da comunidade. No entanto, a ausência de padronização formal traz desafios quando se considera a integração com mercados que exigem conformidade com padrões internacionais.

A comparação entre as medidas tradicionais e as internacionais demonstrou não apenas a viabilidade das práticas locais, mas também a resiliência cultural presente na comunidade. Os instrumentos tradicionais, como o "litro" e a "lata", evidenciam uma ligação profunda entre a produção da farinha e a identidade da comunidade, mostrando que a matemática, mesmo de forma implícita, tem papel fundamental no cotidiano dos produtores.

Para o futuro, é necessário considerar caminhos que permitam a coexistência das medidas tradicionais e internacionais, especialmente se a comunidade de Joana Peres buscar ampliar sua participação em mercados externos. Programas de capacitação que respeitem o saber local podem ser implementados, visando facilitar a transição para práticas que atendam às exigências mercadológicas sem comprometer a herança cultural.

A continuidade dos estudos pode focar na aplicação prática de ferramentas que traduzam as medidas tradicionais em equivalentes padronizados, além de investigar a percepção da própria comunidade sobre essa transição. Assim, será possível aprofundar a discussão sobre a sustentabilidade econômica e cultural da produção de farinha de mandioca na comunidade quilombola de Joana Peres, preservando sua identidade e promovendo seu desenvolvimento.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, A. A. S.; OLIVEIRA, D. M. S. Matemática e cultura: reflexões sobre o ensino de matemática. *Revista Brasileira de Educação Matemática*, São Paulo, v. 14, n. 1, p. 89–107, 2014.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília, DF: MEC, 2008.
- CAVALCANTE, M. R. A importância da matemática na produção de alimentos: um estudo de caso sobre a farinha de mandioca. *Revista Brasileira de Agroecologia*, v. 7, n. 2, p. 152–162, 2016.
- LOPES, A. F. A matemática e sua relação com o contexto cultural e econômico das comunidades tradicionais. *Caderno de Educação Matemática*, v. 10, n. 2, p. 123–134, 2015.
- SILVA, J. S. et al. A sustentabilidade na produção de farinha de mandioca: uma análise da comunidade de Joana Peres. *Revista de Estudos Sociais*, v. 11, n. 1, p. 45–60, 2020.
- UBIRATAN, F. M. *O uso da matemática na agricultura: um estudo sobre a produção de farinha de mandioca*. São Paulo: Editora da Universidade, 2016. 48 p.

O CÁLCULO DIFERENCIAL APLICADO À ECONOMIA: UM ESTUDO SOBRE A IMPORTÂNCIA DAS FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS NA ANÁLISE MARGINAL

  10.56238/livrosindi202535-015

Aridelson Costa da Silva

E-mail: aridelson.silva@cameta.ufpa.br

Felipe Monteiro Soares

E-mail: felipe.soares@cameta.ufpa.br

Jamires Marques Castro Junior

E-mail: jamires.junior@abaetetuba.ufpa.br

Júlio Roberto Soares da Silva

E-mail: julioroberto@ufpa.br

RESUMO

O cálculo diferencial e integral já provou ser um instrumento indispensável na construção de uma sociedade cada vez mais moderna, constituindo uma ferramenta indispensável nas mais diferentes áreas e com a área econômica não seria diferente. Na teoria econômica, onde constantemente há variações de custos, preços e produção, as funções diferenciáveis se fazem grande aliadas na tomada de decisões referentes as variações dessas grandezas. As funções diferenciáveis, com foco na aplicação de exemplos práticos de cálculo na Análise Marginal, são um exemplo de como o cálculo pode ser eficiente no ramo econômico. Assim, desenvolvemos esta pesquisa visando analisar, entender e difundir a importância do cálculo, com enfoque no uso de funções diferenciáveis na Análise Marginal, enquanto ferramenta de análise do comportamento econômico, e como se dá sua aplicação no contexto econômico e as consequentes influências na tomada de decisões.

Palavras-chave: Análise Marginal, Economia, Funções diferenciáveis.

1 INTRODUÇÃO

Segundo Greenspan e Benney (1973), “(...) o Cálculo é o maior triunfo da civilização e tem sido o suporte do progresso científico e tecnológico desde sua criação (...)”. Essa característica do Cálculo como “suporte” para o progresso da ciência e para o desenvolvimento de novas tecnologias é sem dúvida o argumento mais usado no meio acadêmico quando se quer justificar o seu caráter de imprescindibilidade (REZENDE, 2003). Pois bem, iremos além.

Com efeito: o Cálculo é imprescindível para a formação do cidadão. Resolução de problemas de juros ou de crescimento de população (ou do aumento do custo de vida, da dívida externa etc.), cálculos de velocidades ou de taxas de variações de outras grandezas,

interpretações de gráficos de funções reais, resolução de problemas de otimização (de áreas, de orçamentos domésticos etc.) são habilidades cada vez mais requisitadas para o exercício pleno da cidadania em uma sociedade de crescente complexidade (REZENDE, 2003). Em síntese, o cálculo é uma ferramenta essencial no desenvolvimento científico e tecnológico da sociedade moderna e está presente em variadas áreas, oferecendo suporte e ajudando a resolver os mais variados tipos de problemas. Um exemplo é sua utilidade na área econômica, especificamente no que tange ao uso de funções diferenciáveis.

Em Economia, as funções diferenciáveis são chamadas marginais. O conceito de derivada na Economia é aplicado na chamada Análise Marginal. A Análise Marginal, essencialmente, estuda o aporte de cada produto e/ou serviço no lucro das empresas. Ela tenta dar respostas a perguntas do tipo: é conveniente deixar de produzir um determinado produto já existente? Que quantidade de um produto uma empresa deve vender para continuar produzindo? Quais são os efeitos nos lucros da empresa quando ocorrem perturbações na demanda de um produto? É conveniente terceirizar? (VILCHES, 2009).

Nosso objetivo é entender a importância e como se dá a aplicação das funções diferenciáveis no contexto econômico, além de sua influência direta na tomada de decisões gerenciais no âmbito econômico, tais como aumentar ou diminuir a produção.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Ainda que o cálculo diferencial integral tenha sido criado há mais de três séculos por Newton e Leibniz, e suas aplicações tenham sido inicialmente voltadas para as ciências físicas, ele vem encontrando novas aplicações em outros campos do conhecimento, (SIMMONS, 1987). É uma dessas áreas que onde pode ser aplicado, é a área econômica, tendo em vista, que a economia é algo bastante volátil mundialmente.

Na economia, o cálculo diferencial e integral é utilizado para analisar a sensibilidade de variações econômicas, como o custo, a receita e o lucro, em relação às mudanças em outras variáveis, como o preço, quantidade produzida ou insumos. Nesse sentido, sua aplicação é essencial para dimensionar não só os custos de produção, mas também de planejamento. Desta forma, segue o conceito de algumas funções em economia e outras definições que serão importantes para nosso estudo.

Definição 1 (Função Custo Total): É a soma de todos os custos de uma empresa, sejam eles fixos ou variáveis, e está relacionada ao custo de produção de um produto. Em geral é apropriado representar uma função custo por um polinômio, dada por $C_t(x)$.

$$C_{t(x)} = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Em que “a” representa os custos gerais indiretos (aluguel, aquecimento, manutenção), e os outros termos representam o custo de matérias-primas, mão de obra e assim por diante, ou seja, cada coeficiente tem sua representação econômica (STEWART, 2014).

2.1 ANÁLISE MARGINAL

Definição 2 (Custo Marginal): É o aumento (acréscimo) do custo total para produzir uma unidade adicional do bem.

Se a função de custo de um certo bem é derivável, então o custo marginal é a taxa instantânea com a qual aumenta ou diminui o custo para produzir uma unidade adicional do bem.

Definição 3: Seja $C = C(x)$ a função de custo total para produzir um certo bem. Se $C = C(x)$ é derivável, então, denotamos o custo marginal por:

$$CM_g(x) = C'(x).$$

O custo marginal $CM_g(x)$ é o custo aproximado para produzir a unidade $x + 1$ após ter produzido x unidades. Note que o custo marginal independe do custo fixo da empresa.

Em situações normais, $C(x)$ e x são não negativas e deve ter a seguinte propriedade:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow C(x_1) < C(x_2).$$

Isto é, o custo deve crescer se o número de unidades produzidas cresce. Se $C = C(x)$ for diferenciável, temos que:

$$CM_g(x) = C'(x) > 0.$$

para todo x . Quando o número de bens produzidos é muito grande, o custo marginal deve crescer ou ser nulo. Por outro lado, o custo marginal também pode decrescer para alguns valores de x . Logo, a função de custo deve ter intervalos de concavidade para cima e intervalos de concavidade para baixo.

Definição 4: Seja $C \in C^1$.

Se $CM_g(x) > CM_e(x)$, então CM_e é crescente.

Se $CM_g(x) < CM_e(x)$, então CM_e é decrescente.

x_0 é um ponto crítico de $CM_e = CM_e(x)$ se, e somente se $CM_e(x_0) = CM_g(x_0)$.

Segue diretamente, que se derivamos o custo médio: $CM_e(x) = \frac{C(x)}{x}$; temos:

$$CM'_e(x) = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} = \frac{1}{x} [CM_g(x) - CM_e(x)].$$

Corolário: Se $C \in C^2$, então o custo médio é mínimo em x_0 , se satisfaz às seguintes condições:

$$CM_e(x_0) = CM_g(x_0) \text{ e}$$

$$CM'_g(x_0) > 0.$$

Definição 5: O lucro marginal de um bem é o lucro aproximado ao vender uma unidade adicional do bem.

Seja $L = L(x)$ a função de lucro total da venda de um certo tipo de bem. Se $L = L(x)$ é derivável, então, denotamos e definimos o lucro marginal:

$$LM_g(x) = L'(x) = RM_g(x) - CM_g(x).$$

Em situações normais, $L = L(x)$ e x são não negativas e deve ter a seguinte propriedade:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow L(x_1) < L(x_2).$$

Isto significa que se o consumo crescer o lucro cresce. Se $L = L(x)$ for diferenciável, temos que:

$$LM_g(x) = L'(x) > 0, \quad \forall x.$$

2.2 FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

O ensino de derivada e diferencial é imprescindível para todos os cursos de ciências exatas e este conteúdo está presente no currículo dos cursos de todas as engenharias e no currículo das chamadas ciências básicas (matemática, física e química). Em nível avançado a derivada está presente em todas as áreas do conhecimento. Mas o que é derivada? O que é diferencial?

A derivada é uma função real de uma variável real pode ser definida como;

Definição: “a derivada de uma função f em relação a uma variável x é a função f' cujo valor em x é dado por

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

desde que o limite a direita exista” (THOMAS, 2004, P. 308-309).

Para a definição de diferencial, consideraremos agora uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que é derivável em um ponto a , portanto,

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

Que é equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(a)h}{h} = 0.$$

Chamando $\Delta f_a(h) = f(a+h) - f(a)$ e $df_a(h) = f'(a)h$ temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f_a(h) - df_a(h)}{h} = 0,$$

o que nos diz que $df_a(h)$ é uma boa aproximação de $\Delta f_a(h)$. Considere a aplicação linear $df_a(h): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $df_a(h) = f'(a)h$, cuja matriz em relação à base canônica de $\mathbb{R}$ (note que a base canônica de $\mathbb{R}$ é o vetor $u = 1$, considerando $\mathbb{R}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$) é a matriz 1×1 dada por $[df_a(h)] = [f'(a)h]$.

Como a matriz da aplicação diferencial é uma matriz 1×1 e, portanto, um número, a confusão entre derivada e diferencial é comum. A aplicação $df_a(h)$ é a diferencial da função f no ponto a e, comparando com a notação usada por (THOMAS, 2004), vemos que $df_a = dy$ e $h = dx$. Portanto, a aplicação df_a é uma boa aproximação da função f em pontos próximos do ponto a e df_a é linear, assim a aplicação df_a é uma linearização da função f em uma vizinhança do ponto a .

Há algumas situações em que uma função mesmo sendo continua em $x\{0\}$, ainda assim não é derivável em $x\{0\}$. Essas situações são chamadas de: Pontos de bico; pontos de tangencia vertical (AGUIAR, 2012).

3 METODOLOGIA

O tema abordado refere-se na aplicação das derivadas na área da economia, onde as funções diferenciáveis são chamadas funções marginais. Os recursos metodológicos utilizados para construção desse trabalho foram: reuniões em grupo, pesquisas em sites, artigos, monografias e livros de autores como James Stewart e George F. Simmons, entre outros. Após a revisão bibliográfica, apresentamos algumas aplicações de do cálculo, especificamente com o uso de funções diferenciáveis, utilizando exemplos práticos para melhor compreensão e visualização da temática abordada.

4 APLICAÇÕES

Os exemplos utilizados a seguir tem o objetivo de tornar clara a aplicação prática de conceitos do cálculo diferencial no campo econômico e enfatizar sua importância na tomada de decisões de uma área tão volátil.

Aplicação 1: Uma mineradora determina que sua função de custo total para a extração de certo tipo de ferro é dada por $C(x) = 2,5x^2 + 4,32x + 1200$ em US\$, onde x é dada em toneladas de ferro. Determine o custo adicional quando a produção aumenta de 10 para 11 toneladas de ferro. Ache o custo marginal para 10 toneladas.

Primeiramente calculamos $C(11) = 1550,02$ e $C(10) = 1493,20$, logo:

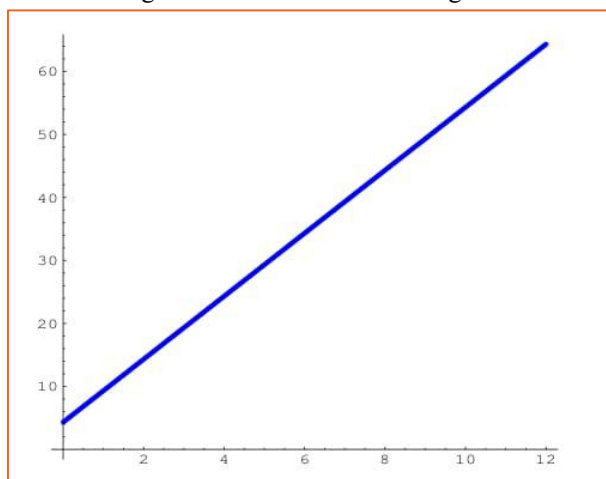
$$C(11) - C(10) = \text{US\$ } 56,82.$$

Derivando a função custo, temos:

$$CM_g(x) = C'(x) = 5x + 4,32 \Rightarrow CM_g(10) = \text{US\$ } 54,32.$$

Isto significa que se a extração de ferro é incrementada em 1 tonelada, de 10 para 11 toneladas a mudança do custo é, aproximadamente US\$ 54,32. Em outras palavras, extrair uma tonelada adicional de ferro custa US\$ 54,32.

Figura 1: Gráfico do custo marginal



Fonte: do autor

Aplicação 2: O custo médio para produzir um certo tipo de componentes mecânicos para motores de carros é dado por: $CM_e(x) = 0,001x^2 - 0,02x + 5 + \frac{5000}{x}$, com $x \neq 0$. Determine o custo adicional quando a produção aumenta de 50 para 51 componentes. Ache o custo marginal para 50 unidades.

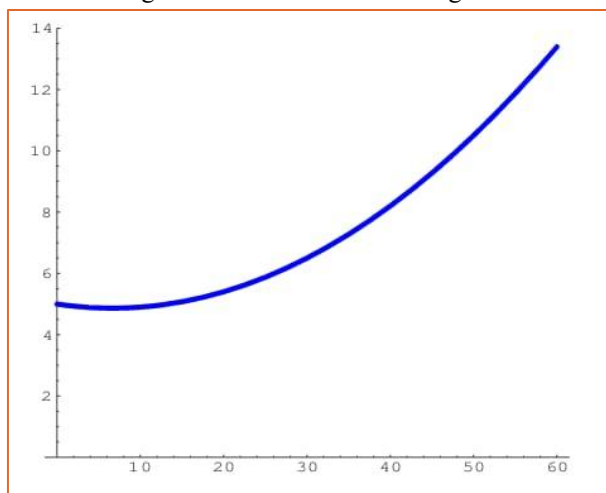
Como $C(x) = x \cdot CM_e(x) = 0,001x^3 - 0,02x^2 + 5x + 5000$, temos: $C(51) = 5335,63$ e $C(50) = 5325,0$, logo:

$$C(51) - C(50) = 10,63.$$

Derivando:

$$CM_g(x) = 0,003x^2 - 0,04x + 5 \Rightarrow CM_g(50) = 10,5.$$

Figura 2: Gráfico do custo marginal



Fonte: do autor

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi elaborado no âmbito de investigar e difundir como a aplicação do cálculo diferencial contribui para uma análise mais acurada de algumas problemáticas simples e cotidianas do setor econômico. Ademais, o estudo das funções diferenciáveis no contexto econômico, nos permite compreender melhor conceitos como custo marginal, receita marginal, lucro marginal e como estes são fundamentais para a gestão empresarial.

Com isso, visamos mostrar como os fundamentos matemáticos podem ser bastante úteis em situações reais, e não somente em contextos escolares ou acadêmicos, e que explorar esses conceitos aplicados em cenários práticos contribuirá para uma compreensão mais profunda e reflexiva.

Por fim, reforçamos a importância de ampliar os estudos sobre a temática, considerando que as diversas vertentes que há no cálculo diferencial e também na integral possibilitam uma abordagem mais prática e abrangente, promovendo assim o desenvolvimento de uma mentalidade crítica e significativa.

REFERÊNCIAS

- AGUIAR, Rogério; SIPLE, Ivanete Zuchi; MORO, Graciela. *Conceito de derivada e diferencial: concepções e relações*. Joinville: Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas – CCT-UDESC, 2012.
- GREENSPAN, H. P.; BENNEY, D. J. *Calculus: an introduction to applied mathematics*. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha Ltd, 1973.
- REZENDE, Wanderley Moura. *O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. In: Linguagem, Conhecimento, Ação – ensaios de epistemologia e didática. São Paulo: Escrituras, 2003.
- SIMMONS, G. F. *Cálculo com Geometria Analítica*. v. 2. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- STEWART, James. *Cálculo*. v. 1. Tradução da 6. ed. norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2010.
- THOMAS, G. B. *Cálculo*. v. 1. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2004.
- VILCHES, M. A. *Cálculo para economia e administração: volume I*. 2009. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5283714/mod_resource/content/1/Calculo%20para%20Economia.pdf. Acesso em: 01 set. 2024.

IMPACTOS ECONÔMICOS E SOCIAIS DA COVID-19: ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE AS ÁREAS URBANAS E RURAIS DE BAIÃO, PARÁ

  10.56238/livrosindi202535-016

Fabíola Campelo Ribeiro

E-mail: ribeirofabiola315@gmail.com

Paula Rita da Silva de Menezes

E-mail: paularitamenezes@gmail.com

Dalmi Gama dos Santos

E-mail: dalmi@ufpa.br

Ulisses Weyl da Cunha Costa

E-mail: uliweyl@ufpa.br

RESUMO

O presente artigo analisa as desigualdades econômicas exacerbadas pela pandemia de COVID-19, comparando os impactos entre áreas urbanas e rurais de Baião, Pará. A pesquisa, conduzida no âmbito do Projeto IoT para Monitoramento de COVID-19, coleta dados quantitativos que revelam as dificuldades enfrentadas por comunidades de baixa renda e vulneráveis, com destaque para a zona rural, onde problemas de acesso a serviços essenciais agravam a situação. Paralelamente, foi realizada uma pesquisa de campo na Zona Rural em tendo os dados coletados na Vila de Massaranduba como base para a análise sobre as dificuldades locais. Os resultados indicam a necessidade de políticas públicas direcionadas para mitigar os efeitos da pandemia de forma equitativa, considerando as especificidades de cada região. A triangulação dos dados permite uma visão abrangente e detalhada, fornecendo subsídios para estratégias de recuperação mais justas e inclusivas.

Palavras-chave: Desigualdades Regionais, Disparidades Econômicas, Estudo comparativo, Pandemia de COVID-19, Áreas Urbanas e Rurais.

1 INTRODUÇÃO

A pandemia de COVID-19 desencadeou uma série de desafios econômicos sem precedentes, afetando significativamente o panorama mundial. As restrições de mobilidade, a queda nas atividades comerciais e as medidas de lockdown tiveram um impacto profundo nas vidas das pessoas e em suas condições financeiras. No contexto da atual crise econômica, observou-se uma tendência de redução nos gastos em atividades consideradas não essenciais, tais como viagens, entretenimento e restaurantes, o que afetou negativamente os setores relacionados a essas atividades. Em algumas áreas, a insegurança alimentar tornou-se uma preocupação mais proeminente devido às dificuldades econômicas, especialmente para aqueles que dependem da agricultura de subsistência ou de mercados locais.

“Os pobres rurais do Brasil continuam a ser os mais desfavorecidos em diversas dimensões” (Banco Mundial, 2022, p.10). Diante desses desafios, este estudo se propõe a analisar as dificuldades econômicas enfrentadas tanto nas zonas urbanas quanto nas rurais durante a pandemia de COVID-19, visando destacar as diferenças nas experiências econômicas vivenciadas por cada localidade e identificar as dificuldades impostas pelo isolamento social.

A justificativa do estudo enfatiza a importância de compreender as complexas consequências da pandemia de COVID-19, destacando as vulnerabilidades das famílias e dos sistemas de saúde em áreas rurais. O artigo ressalta o descaso social e econômico, especialmente em regiões rurais, e como isso afetou o acesso a serviços de saúde básicos e a subsistência das famílias. O objetivo geral do estudo é analisar os impactos sociais e econômicos sofridos pela vila de Massaranduba e pela cidade de Baião durante a pandemia de COVID-19.

O estudo destaca nuances específicas nas zonas rurais e urbanas da cidade de Baião–PA, onde as dificuldades geográficas agravam os desafios colocados pela pandemia. A triangulação dos dados obtidos durante a pesquisa de campo visa fornecer uma compreensão mais profunda das consequências econômicas e sociais, contribuindo assim para o desenvolvimento de políticas públicas mais eficazes. Na situação específica da comunidade de Massaranduba, é de extrema importância que o município se concentre no enfrentamento da questão do desemprego. O.

Além disso, é crucial implementar políticas públicas eficientes, incluindo a concessão de incentivos fiscais e assistência financeira às pequenas empresas. Essas medidas podem contribuir significativamente para a recuperação econômica e, em última análise, resultar em uma diminuição das taxas de desemprego, promovendo assim uma recuperação mais rápida e sustentável para todos os cidadãos.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A pandemia teve um impacto profundo na economia, com consequências significativas em diversos setores. Houve uma redução drástica na atividade econômica, isso resultou no fechamento de empresas e perda de empregos em larga escala.

Começando como uma crise sanitária, a pandemia da COVID-19 afetou rapidamente a população numa vasta gama de outras dimensões, com implicações para a pobreza e a equidade que podem estender-se muito para além do período da pandemia. No curto prazo, para o bem-estar monetário, o impacto da pandemia afetou os rendimentos do trabalho, os rendimentos não laborais e os preços. (BANCO MUNDIAL, 2022, p.110).

De abril a julho de 2020, as medidas restritivas de movimentação e distanciamento social implementadas pelas autoridades municipais e estaduais para combater o avanço do vírus têm consequências imediatas no emprego e na renda da população. Os trabalhadores autônomos foram os mais afetados inicialmente pela crise, enquanto os empregados formais conseguiram manter seus empregos por um tempo devido aos custos de demissão e contratação que as empresas teriam que assumir. (DA SILVA E DA SILVA, 2020).

Estruturas econômicas de todo o mundo foram abaladas pela pandemia do novo coronavírus (SARS-CoV-2), principalmente os países designados como subdesenvolvidos ou emergentes. Contudo, devido ao grande impacto provocado pela COVID-19, até os países mais articulados financeiramente tiveram suas economias abaladas. (SILVA ET AL, 2020, p. 132).

De acordo com o Relatório especial (2021, p.29) feito pela Universidade Federal do Pará (UFPA), “é possível notar, que o volume de vendas no comércio foi ainda mais afetado que o volume de serviços, tendo registrado em abril de 2020 uma dimensão 16,2%”. Como pode ser observado pelo declínio de 16,2% no volume de vendas registrado, indica uma forte queda nas transações comerciais, indicando uma redução na demanda por produtos, incluindo fechamentos de lojas físicas.

Outrossim a crise abrangeu todo país, no entanto foi mais agravante ao norte e nordeste do Brasil, conforme o Banco Mundial (2022, p.04), “os residentes no Norte e Nordeste, grupos caracterizados por uma escolaridade mais baixa e uma maior propensão para trabalhar informalmente ou por conta própria, experimentaram grandes quedas nas suas taxas de emprego em 2020”. “A diferença foi maior no Nordeste, uma das regiões mais pobres do Brasil, onde a diferença no envolvimento escolar entre o momento da pesquisa e antes da pandemia era de 14,7 pontos percentuais. Em outros estados, essa diferença variou entre 6 a 7 por cento”. (BANCO MUNDIAL 2022, p.115).

Os estados do Norte têm taxas de pobreza 2,7 vezes mais elevadas do que os estados do Sul, o rendimento per capita é em média cerca de 52 por cento mais baixo, a população adulta tem menos 1,5 anos de educação e o acesso das pessoas ao saneamento e à água é ambos 8 pontos percentuais mais baixo. (BANCO MUNDIAL, 2020, p.08).

Ademais, não podemos deixar de citar as consequências sofridas pelas zonas rurais, que por sua vez vivem da agricultura, conforme Da Silva Et Al, (2020, p.77), “Populações rurais no interior da Amazônia têm enfrentado ainda mais dificuldades em virtude da pandemia da COVID-19 por se localizarem em áreas classificadas como de maior vulnerabilidade”. Além dos desafios enfrentados pelos residentes no desenvolvimento de suas cadeias produtivas, estes ainda necessitam percorrer longas distâncias até as sedes

municipais principais a fim de utilizar serviços essenciais e não essenciais, bem como para o escoamento e comercialização de sua produção. (DA SILVA ET AL, 2020, P.81).

O escoamento da produção oriunda das atividades da agricultura familiar, como os produtos que estão em plena safra, frutas in natura dos sítios agroflorestais e das florestas, polpas, farinha e outros derivados da mandioca, e também da atividade da pesca artesanal, têm sido pouco comercializados nos centros urbanos e muitos produtos, principalmente as frutas, têm sido perdidas. (DA SILVA ET AL, 2020, p.83).

A restrição de mobilidade e o receio das pessoas em se deslocarem aos centros urbanos devido à pandemia causou a não comercialização desses produtos, resultando em perdas significativas. Como a maioria da produção agrícola das famílias é vendida nesses locais, os impactos nas cadeias produtivas são evidentes, além dos danos econômicos, a ausência de comercialização afeta diretamente a autonomia financeira das famílias, que dependem dessas vendas para sua subsistência. A Conforme Futemma et al. (2021), a interrupção das cadeias de suprimento e a diminuição da demanda por produtos agrícolas levaram muitos produtores a sucumbir diante das dificuldades.

No Pará, de forma geral, os PPR normalmente vendem seus produtos a intermediários ou vendem diretamente ao consumidor em feiras livres ou mercados. Mesmo os agricultores de produtos orgânicos ou agroecológicos enfrentam maiores dificuldades do que seus pares no estado de São Paulo, pois há uma menor classe média que consome esses produtos e com maior valor agregado (Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento, 2019). Eles também enfrentam grandes barreiras com relação às estradas e pontes precárias e ao transporte deficiente para escoar seus produtos agrícolas que, em geral, são perecíveis. (FUTEMMAL ET AL, 2021, p.5).

Em consoante com Breitenbach (2021, p. 190), “como o isolamento social e o fechamento do comércio foram medidas de urgência, não foi possível, para muitos agricultores, se adequarem rapidamente a esse novo cenário de mercado”. Essas restrições têm o potencial de agravar a situação de insegurança alimentar e pobreza, sendo esses desafios mais prevalentes nas áreas rurais do que nas urbanas. Com a interrupção das cadeias de suprimentos e o fechamento de canais de venda tradicionais, os agricultores enfrentaram dificuldades para escoar seus produtos e encontrar novos mercados. Além disso, as restrições de mobilidade também afetaram a mão de obra agrícola e o acesso a insumos essenciais, complicando ainda mais a situação. Em suma, embora as medidas de isolamento tenham sido necessárias para enfrentar a crise sanitária, é crucial reconhecer os impactos desproporcionais que tiveram sobre os agricultores e trabalhar para mitigar esses efeitos adversos.

A restrição das opções de comercialização para os agricultores familiares, que tradicionalmente vendem seus produtos em feiras livres ou fornecem para estabelecimentos como restaurantes, bares, shoppings e hotéis, teve um impacto significativo. Esse problema foi agravado pelas dificuldades enfrentadas por esse setor para se inserir nas cadeias agroalimentares tradicionais (BREITENBACH, 2021, p. 190). A limitação das opções de comercialização para os agricultores familiares implicou em uma série de impactos significativos. Primeiramente, esses agricultores perderam importantes canais de venda, como feiras livres e estabelecimentos comerciais, o que reduziu suas fontes de renda. Além disso, a dependência desses agricultores em fornecer para restaurantes, bares, shoppings e hotéis os expôs diretamente às restrições impostas pelo fechamento desses estabelecimentos durante períodos de isolamento social. Como resultado, muitos agricultores enfrentaram dificuldades financeiras e de escoamento de seus produtos, o que pode ter levado a perdas econômicas significativas.

Aproximadamente 60% dos trabalhadores rurais em situação de pobreza estão empregados no setor agrícola - um setor que tem apresentado uma tendência de longo prazo de declínio e provavelmente continuará a diminuir, apesar do crescimento do setor. É provável que pessoas em condições de pobreza rural trabalhem em uma das propriedades familiares do Brasil. (BANCO MUNDIAL, 2022, p.96). A pandemia da COVID-19 acarretou inúmeros problemas econômicos em todos os setores financeiros e em todo o país, no entanto na zona rural, os impactos econômicos foram ainda mais desafiadores. Muitos agricultores e trabalhadores rurais enfrentaram dificuldades para escoar a produção, devido às restrições de mobilidade e ao fechamento de mercados.

3 METODOLOGIA

A metodologia foi cuidadosamente planejada para garantir a coleta precisa de dados que permitissem uma análise abrangente das desigualdades econômicas e sociais nas áreas urbanas e rurais de Baião, durante a pandemia de COVID-19. A abordagem adotada combinou técnicas de pesquisa quantitativa e qualitativa, permitindo que o levantamento de dados fosse feito de maneira sistemática e rigorosa. Além disso, o estudo utilizou a triangulação de dados, que visa aumentar a validade das informações ao cruzar diferentes fontes e métodos de coleta.

Os dados foram coletados por meio de um questionário estruturado, aplicado em cinco cidades da região, com foco em Baião, em especial na vila de Massaranduba (zona rural) e na sede do município (zona urbana). O questionário foi projetado para coletar informações

socioeconômicas abrangentes. A metodologia adotada reconhece as limitações do estudo, incluindo possíveis vieses na coleta de dados e restrições geográficas que podem afetar a generalização dos resultados. A avaliação final enfatiza a importância da transparência na condução da pesquisa, discutindo abertamente as limitações e os cuidados tomados para mitigá-las.

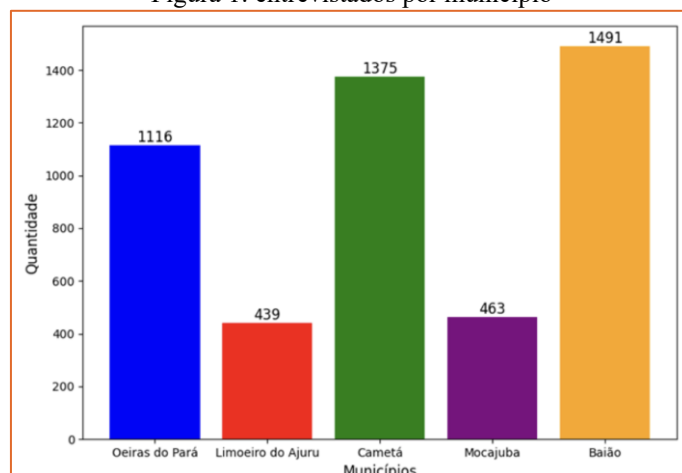
Ao combinar dados do projeto Monitora Tocantins com informações coletadas por meio de investigações e questionários próprios com perguntas correlacionadas com as do projeto Monitora, esta metodologia visa fornecer uma análise aprofundada e confiável dos impactos econômicos e sociais da pandemia em Baião-PA, especificamente na Vila de Massaranduba. A abordagem multidisciplinar e a triangulação de dados asseguram a robustez das conclusões, oferecendo informações valiosas para a criação de políticas públicas mais eficazes e equitativas, adaptadas às circunstâncias específicas da região.

4 ANÁLISE DE DADOS

O projeto Monitora Tocantins foi desenvolvido com o intuito de obter uma compreensão abrangente sobre a situação vacinal da população e os desafios enfrentados pelas comunidades rurais durante a pandemia de COVID-19. A pesquisa busca gerar resultados expressivos tanto em pesquisa quanto em extensão, mapeando as disparidades entre as áreas urbanas e rurais e identificando os principais gargalos na implementação de políticas públicas nessas regiões.

Nos resultados a seguir, os dados coletados são apresentados por meio de gráficos, permitindo uma visualização direta e compreensível das informações. Esses gráficos revelam as diferenças significativas entre as áreas rurais e urbanas, além de fornecer uma análise detalhada sobre as faixas etárias, situação econômica e impacto das políticas de saúde pública durante o período pandêmico.

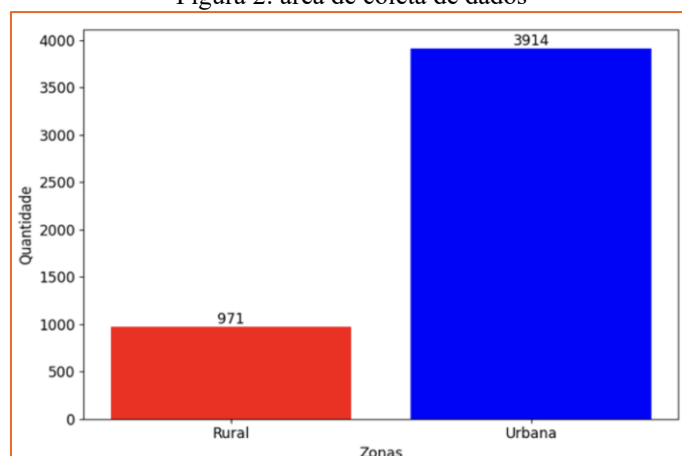
Figura 1: entrevistados por município



Fonte: Projeto IoT

O projeto Monitora Tocantins realizou 4.885 entrevistas, distribuídas entre cinco cidades-chave da região do Baixo Tocantins. O objetivo era obter o máximo de dados sobre os impactos da COVID-19 nessas áreas, enfatizando questões que, anteriormente, não eram claras ou precisas devido à geografia complexa da região. As cidades estudadas foram Baião, Cametá, Oeiras do Pará, Mocajuba e Limoeiro do Ajuru, o que permitiu uma análise mais aprofundada das condições enfrentadas pelas populações locais durante a pandemia.

Figura 2: área de coleta de dados

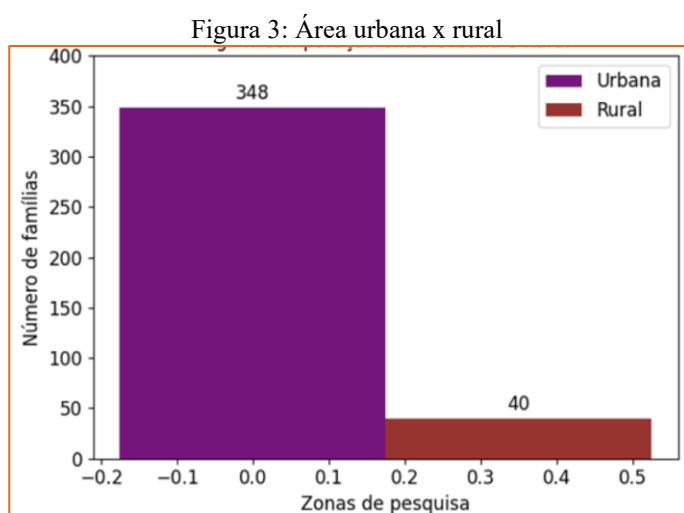


Fonte: Projeto IoT

Os dados coletados pelo Projeto Monitora Tocantins ilustram as disparidades econômicas e sociais acentuadas pela pandemia de COVID-19, revelando uma forte correlação entre localização geográfica, faixa etária, nível de escolaridade, e o impacto econômico sofrido pelas comunidades urbanas e rurais. O objetivo central é apontar as falhas e insuficiências das políticas públicas durante a pandemia, oferecendo sugestões para uma abordagem mais equitativa e eficiente.

A concentração de 80,1% dos entrevistados em áreas urbanas reflete a maior facilidade de coleta de dados e a densidade populacional nestas regiões. No entanto, isso já revela um viés metodológico significativo, uma vez que as áreas rurais – mais dispersas e de difícil acesso – estão sub-representadas na amostra (19,85%).

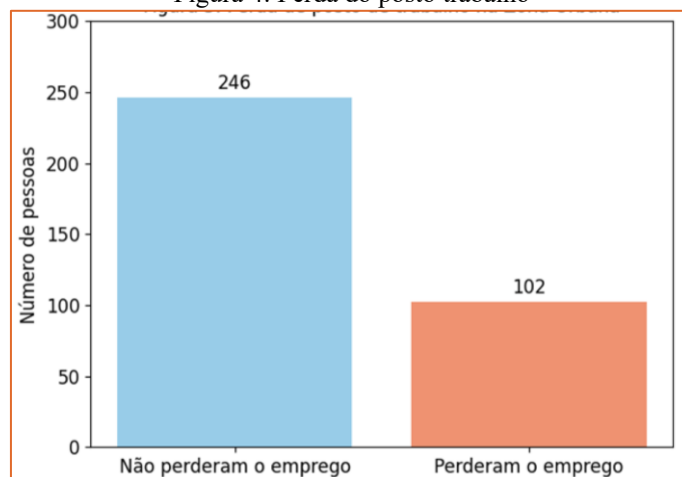
O gráfico a seguir destaca a pesquisa local através de questionário próprio, realidade na zona urbana e rural, essa disparidade entre os números de entrevistados, 388, evidencia as dificuldades enfrentadas na coleta de dados nas áreas rurais. A geografia e o distanciamento das comunidades rurais apresentam desafios consideráveis, tornando o acesso a essas áreas mais difíceis.



Fonte: Projeto IoT

O gráfico na fig.4 aponta a *perca de empregos* pelas pessoas entrevistadas na zona urbana de nossa pesquisa local, demonstrando que nas áreas urbanas, cerca de 246 entrevistados não perderam seus empregos, mas 102 pessoas relataram a perda de postos de trabalho. A redução de renda foi mais acentuada nas áreas rurais, onde 45,5% das famílias relataram uma diminuição significativa de seus ganhos. Esses dados mostram que as áreas urbanas tiveram um desempenho econômico um pouco mais resiliente devido à diversidade de empregos e à presença de setores formais.

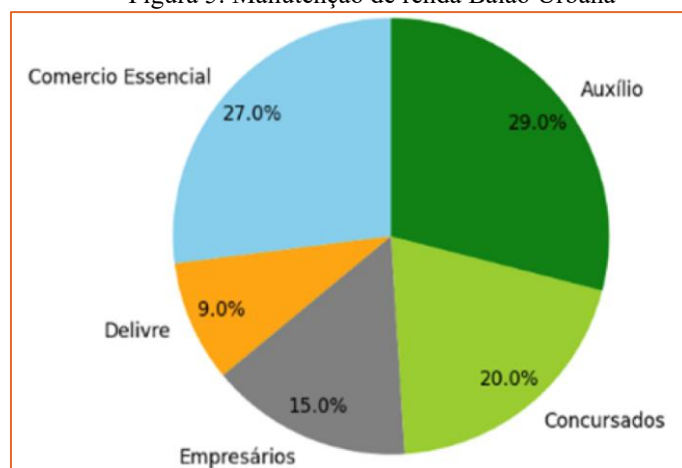
Figura 4: Perda do posto trabalho



Fonte: Coleta própria

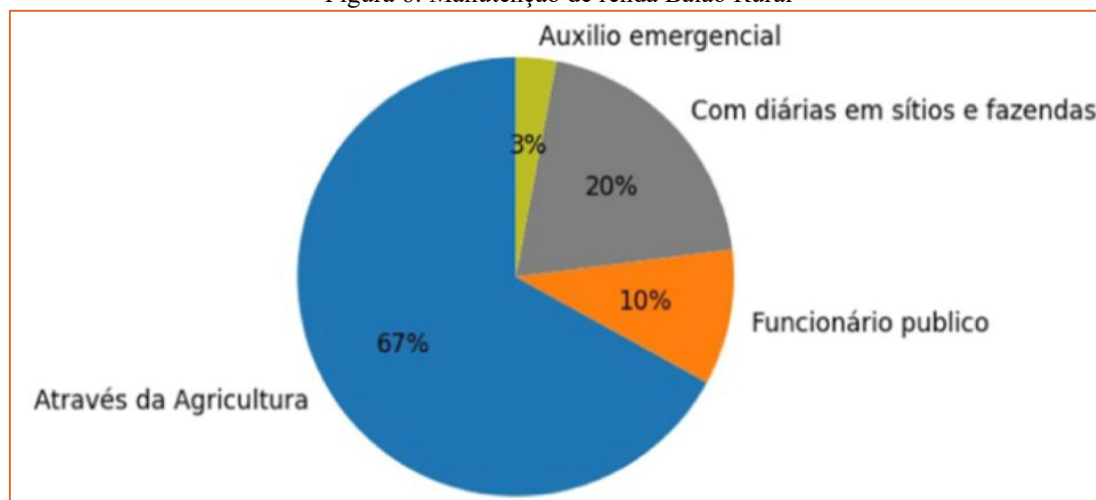
A análise dos gráficos referentes aos municípios de Baião Urbana (fig. 4) e Vila de Massaranduba Baião Rural (fig. 5) revela diferenças significativas entre a zona urbana e a zona rural no contexto de perda de empregos durante a pandemia. Em Massaranduba, na zona rural, a situação foi mais crítica. Esses dados evidenciam a disparidade entre as zonas urbana e rural, destacando como a área rural foi mais impactada economicamente durante a pandemia.

Figura 5: Manutenção de renda Baião Urbana



Fonte: Coleta própria

Figura 6: Manutenção de renda Baião Rural

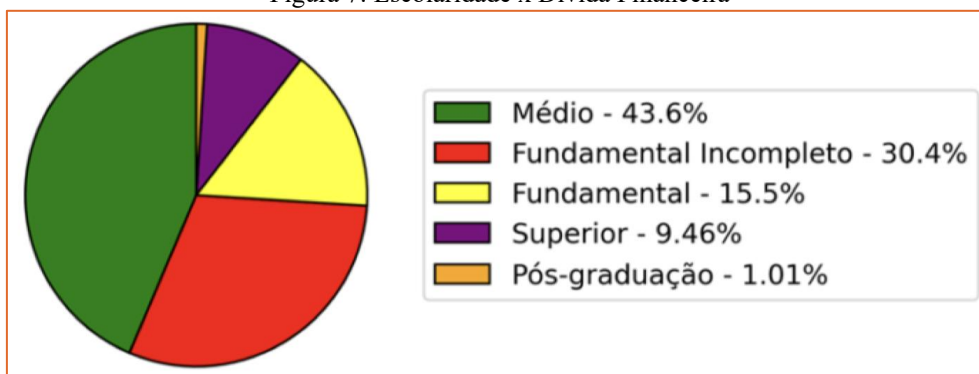


Fonte: Coleta própria

Esses dados evidenciam que a zona rural sofreu grandes dificuldades economicamente durante a pandemia em relação a zona urbana, a dependência maior da agricultura e a menor proporção de pessoas recebendo auxílio emergencial indicam uma vulnerabilidade econômica maior nas áreas rurais em comparação com os centros urbanos, enquanto nas áreas urbanas, a manutenção da renda foi possível com a ajuda de comércio essencial (27%), auxílio emergencial (29%), e servidores públicos (20%), nas zonas rurais, 67% das famílias dependeram exclusivamente da agricultura (Figura 5). Além disso, apenas 3% das famílias rurais tiveram acesso ao auxílio emergencial, indicando que a dependência do setor.

Os dados coletados pela pesquisa em Massaranduba (Baião Rural- pesquisa própria) e pelo Projeto Monitora Tocantins (Baião Urbana) revelam informações críticas sobre o impacto econômico da pandemia nas zonas rurais, a pesquisa em Massaranduba indica que a maior dificuldade enfrentada pela comunidade durante a pandemia foi o acúmulo de contas em atraso. O gráfico do Projeto IoT, por sua vez, mostra uma relação significativa entre dívidas financeiras e escolaridade, destacando que as maiores *percentagens de endividamento* estão entre pessoas com ensino médio e ensino fundamental incompleto.

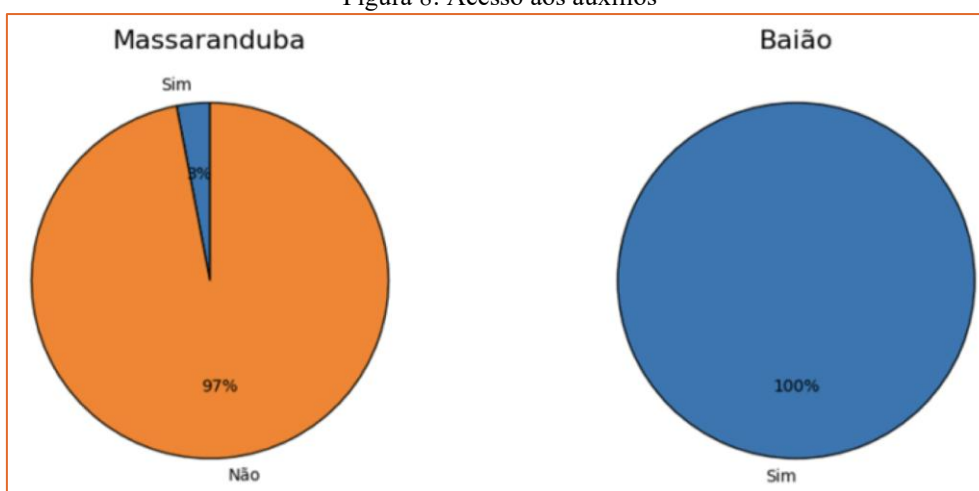
Figura 7: Escolaridade x Dívida Financeira



Fonte: Projeto IoT

A pesquisa destaca uma disparidade na *distribuição do auxílio emergencial* é alarmante: enquanto 100% dos entrevistados urbanos de Baião relataram ter recebido o auxílio, apenas cerca de 3% das famílias rurais de Massaranduba tiveram acesso ao benefício. Isso evidencia uma falha clara no acesso a recursos governamentais para áreas rurais, em grande parte devido à falta de informação, burocracia e distâncias geográficas que dificultam o acesso ao programa. Em comparação, na vila de Massaranduba (zona rural), tivemos na pesquisa própria o cenário como se vê nos gráficos abaixo.

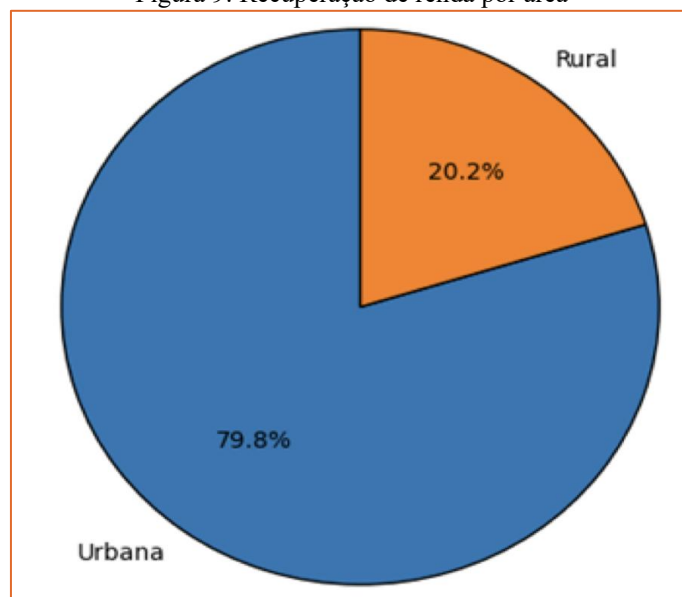
Figura 8: Acesso aos auxílios



Fonte: Pesquisa própria

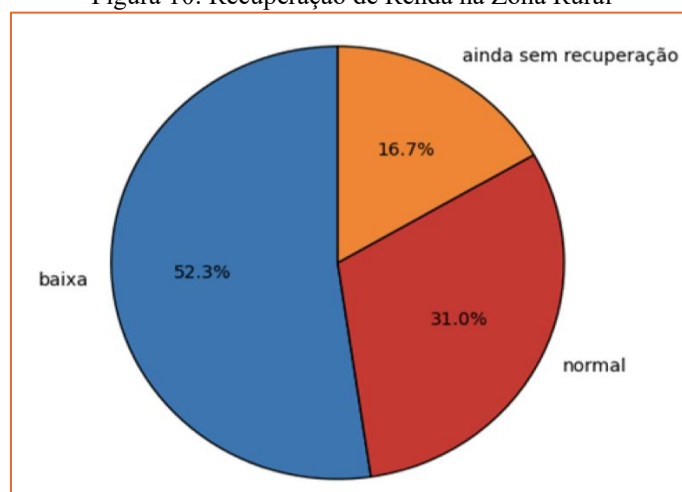
Comparando os dados do Monitora Tocantins com a pesquisa realizada em Massaranduba, fica evidente o impacto desproporcional da pandemia na zona rural. A recuperação da renda familiar foi mais rápida nas áreas urbanas, onde 79,8% das famílias já haviam recuperado parte ou toda sua renda (fig. 8). Nas áreas rurais, apenas 20,2% das famílias relataram recuperação econômica, sendo que 52,3% ainda estão com renda muito baixa (fig. 9).

Figura 9: Recuperação de renda por área



Fonte: Projeto IoT

Figura 10: Recuperação de Renda na Zona Rural



Fonte: Pesquisa própria

Isso evidencia uma recuperação desigual entre as duas regiões, em grande parte devido à falta de suporte econômico, falta de diversificação de atividades e dificuldade de escoamento de produtos agrícolas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os dados do Projeto Monitora Tocantins demonstram de forma clara as desigualdades econômicas e sociais causadas pela pandemia, com diferentes impactos nas áreas urbanas e rurais. Enquanto as áreas urbanas tiveram acesso mais facilitado a serviços de assistência, como o auxílio emergencial, as áreas rurais enfrentaram dificuldades adicionais devido à sua geografia e condições socioeconômicas.

A recuperação econômica foi mais acelerada nas áreas urbanas, impulsionada pelo acesso a serviços de saúde, educação e assistência social. As atividades econômicas foram retomadas com maior antecedência, uma vez que a infraestrutura estava mais disponível. No entanto, nas áreas rurais, a dependência da agricultura, as limitações de transporte de produtos e as limitações de mobilidade provocaram uma queda acentuada na renda das famílias. Muitos agricultores perderam as suas colheitas devido à dificuldade de comercializar seus produtos.

Os dados revelam que 79,8% dos entrevistados nas áreas rurais tiveram grandes dificuldades para recuperar a renda, o que demonstra que as políticas públicas de apoio, como o auxílio emergencial, não foram eficazes para atender às necessidades dessas comunidades, em parte devido à falta de acesso e à burocracia, escolaridade e falta de informação. A recuperação econômica nas áreas rurais foi mais lenta devido ao dependente da agricultura e às barreiras geográficas. Esses desafios reforçam a relevância de políticas públicas adequadas às necessidades específicas de cada região, promovendo uma recuperação mais justa e inclusiva.

Em futuros estudos, é possível aprofundar-se em outras áreas rurais da Amazônia, avaliando o impacto da pandemia em longo prazo. Além disso, seria relevante investigar a eficiência das políticas públicas implementadas e sugerir melhorias com base nas lições aprendidas durante este período.

REFERÊNCIAS

DA CONCEIÇÃO SILVA, Delmira Santos; DOS SANTOS, Marília Barbosa; SOARES, Maria José Nascimento. Impactos causados pela COVID-19: um estudo preliminar. *Revista Brasileira de Educação Ambiental (RevBEA)*, v. 15, n. 4, p. 128-147, 2020.

DA SILVA, Mygre Lopes; DA SILVA, Rodrigo Abbade. Economia brasileira pré, durante e pós-pandemia do covid-19: impactos e reflexões. *Observatório Socioeconômico da Covid - FAPERGS*, 2020.

FUTEMMA, Celia et al. A pandemia da Covid-19 e os pequenos produtores rurais: superar ou sucumbir?. *Boletim do Museu Paraense Emílio Goeldi. Ciências Humanas*, v. 16, p. e20200143, 2021.

BREITENBACH, Raquel. Estratégias de enfrentamento dos efeitos da pandemia na agricultura familiar. *Desafio Online*, v. 9, n. 1, 2021. Disponível em: <http://www.desafioonline.ufms.br>. Acesso em: 13 de nov. de 2023.

RELATÓRIO ESPECIAL. Impactos Da Crise Pandêmica E Econômica No Mercado De Trabalho Paraense. *Observatório Paraense do Mercado de Trabalho - Universidade Federal do Pará*, fevereiro de 2021. Disponível em: <https://ascom.ufpa.br/links/outros/Relat%C3%B3rioEspecialOpamet.pdf>. Acesso em: 05 de nov. de 2023.

SILVA, J. R.; SANTOS, J. P. G.; VIANA, F. M. F.; OLER, J. R. L.; STEWARD, A. M. Impactos da COVID-19 nas cadeias produtivas e no cotidiano de comunidades tradicionais na Amazônia Central. *Mundo Amazônico*, 11(2), p. 75-92, 2020.

WORLD BANK. Brazil poverty and equity assessment looking ahead of two crises. *World Bank*. Disponível em: <https://www.worldbank.org/pt/news/press-release/2022/07/14/pobreza-e-desigualdade-no-brasil-pandemia-complica-velhos-problemas-e-gera-novos-desafios-para-populacao-vulneravel>. Acesso em: 05 de nov. de 2023.

OS MÉTODOS DE GRADIENTE E NEWTON APLICADOS A PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

 Crossref  10.56238/livrosindi202535-017

José Andrey Carvalho Barreiros

E-mail: joseandreyj1@gmail.com

Rubervaldo Monteiro Pereira

E-mail: rubenp@ufpa.br

Leonardo de Nazare da Silva

E-mail: leonardo.nazare.silva@cameta.ufpa.br

Ronald Sanches Garcia

E-mail: ronald.garcia@cameta.ufpa.br

Gustavo Delgado da Gama

E-mail: gustavo.gama@cameta.ufpa.br

RESUMO

Este trabalho apresenta uma análise comparativa entre os métodos de gradiente e Newton puro, aplicados a problemas de otimização não-linear. Inicialmente, aborda-se o método de direção de descida, seguido pela introdução e aplicação do método de gradiente, que busca o mínimo da função ao seguir a direção de maior declive. Em seguida, explora-se o método de Newton puro, que utiliza tanto a primeira quanto a segunda derivada para convergência rápida e precisa ao ponto ótimo. Através de exemplos práticos desenvolvidos no software Octave, os métodos foram avaliados quanto à eficiência e limitações. Observou-se que o método de gradiente é eficiente em problemas de grande escala, enquanto o método de Newton se destaca em precisão e velocidade de convergência em funções próximas de quadráticas, embora com maior custo computacional. Como continuidade, propõe-se o estudo do método de Levenberg-Marquardt para otimizações em contextos mais complexos, combinando vantagens dos métodos anteriores.

Palavras-chave: Otimização, Método de Gradiente, Método de Newton, Levenberg-Marquardt.

1 INTRODUÇÃO

A resolução de problemas de otimização numérica é essencial nas áreas de engenharia e ciências aplicadas, especialmente em contextos que exigem precisão e eficiência nos cálculos (CHAPRA, 2013). Para alcançar soluções eficientes, diversos métodos são empregados, cada um com suas características e adequações específicas. No contexto deste trabalho, duas metodologias fundamentais na otimização — o método do gradiente e o método de Newton puro — são analisadas e comparadas quanto a suas vantagens e limitações.

Primeiramente, apresenta-se o método de direção descendente, uma técnica básica que orienta o movimento na direção de diminuição da função objetivo, fornecendo a base conceitual para métodos de otimização mais avançados. Em seguida, explora-se o método de gradiente, que

utiliza a direção de maior declive para localizar o mínimo de uma função e que se destaca por sua simplicidade e eficiência em problemas de grande escala. Contudo, o método de gradiente apresenta limitações, como a convergência lenta em superfícies planas e a necessidade de uma taxa de aprendizado adequada, dificultando sua aplicação em cenários complexos (BECK, 2017).

Por outro lado, o método de Newton puro é apresentado como uma abordagem que inclui a análise da segunda derivada da função, utilizando a matriz Hessiana para alcançar uma convergência mais rápida em problemas quadráticos. Apesar de sua elevada precisão e convergência rápida, o cálculo da matriz Hessiana torna-se inviável em problemas de grande escala, além de demandar uma boa aproximação inicial para garantir a eficiência do método (SOLLERO, 1992). Para ilustrar esses métodos, são desenvolvidos exemplos práticos no software Octave, destacando suas aplicações em problemas não-lineares de otimização.

Assim, os métodos de otimização Gradiente e Newton constituem ferramentas numéricas fundamentais para a resolução de problemas complexos em otimização. Cada método oferece características específicas: enquanto o método de gradiente destaca-se pela simplicidade e aplicabilidade em problemas de grande escala, o método de Newton oferece uma convergência mais rápida e precisa, desde que seja viável computacionalmente. Essas características tornam ambos os métodos relevantes, embora suas limitações indiquem a necessidade de escolhas cuidadosas conforme as demandas do problema. A partir dessa análise, o presente trabalho busca oferecer uma visão comparativa que auxilie na seleção da metodologia mais adequada para diferentes contextos de otimização.

2 MÉTODOS DE DIREÇÕES DESCENDENTE

Consideramos o problema de minimização sem restrições da função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, para $\min \{f(x): x \in \mathbb{R}^n\}$. Assumimos que a função objetivo é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^n$. Uma primeira ordem de condição necessária de otimalidade é que o gradiente desapareça nos pontos ótimos, então em princípio a solução ótima do problema pode ser obtida encontrando entre todos os pontos estacionários de f aquele com o valor mínimo da função. Na maioria dos problemas, tal abordagem não é implementável pelas seguintes razões: (i) pode ser uma tarefa muito difícil resolver o conjunto de equações (geralmente não lineares) $\nabla f(x) = 0$; (ii) mesmo que seja possível encontrar todos os pontos estacionários, pode ser que haja um número infinito de pontos estacionários e a tarefa de encontrar aquele correspondente ao valor mínimo da função seja um problema de otimização que por si só pode ser tão difícil quanto o problema original.

Por essas razões, em vez de tentar encontrar uma solução analítica para a condição de estacionariedade, consideraremos um algoritmo iterativo para encontrar pontos estacionários. Os algoritmos iterativos que consideraremos assumem a forma $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, onde d_k é a chamada direção e t_k é o tamanho do passo.

Definição 1 (Direção descendente)

Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^n$. Um vetor $d \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ (d diferente de zero e pertencente a $\mathbb{R}^n$) é chamado de direção de descida de f em x se a derivada direcional $f'(x; d)$ for negativa, o que significa que:

$$f'(x; d) = \nabla f(x)^T d < 0.$$

A propriedade mais importante das direções de descida é que dar passos suficientemente pequenos nessas direções leva a uma diminuição da função objetivo.

Lema 1 (Propriedade das direções descendentes)

Seja f uma função continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e seja $x \in \mathbb{R}^n$. Suponha que d seja uma direção de descida de f em x . Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$f(x + td) < f(x)$$

para qualquer $t \in (0, \varepsilon]$.

Prova. Como $f'(x; d) < 0$, segue da definição da derivada direcional que:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(x + td) - f(x)}{t} = f'(x, d) < 0.$$

Portanto, existe um $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\frac{f(x + td) - f(x)}{t}$$

para qualquer $t \in (0, \varepsilon]$, o que prontamente implica o resultado desejado.

Estamos agora prontos para escrever um método geral de direções de descida de forma esquemática.

Método esquemático de direções descendentes

Inicialização: Escolha arbitrariamente $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Passo geral: Para qualquer $k = 0, 1, 2, \dots$ defina

- a) Escolha uma direção de descida d_k .
- b) Encontre um tamanho de passo t_k satisfazendo $f(x_k + t_k d_k) < f(x_k)$.
- c) Defina $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$.
- d) Se um critério de parada for satisfeito, então PARE e x_{k+1} é a saída.

3 O MÉTODO DO GRADIENTE

No método do gradiente, a direção de descida é escolhida como o negativo do gradiente no ponto atual: $d_k = -\nabla f(x_k)$. O fato de que esta é uma direção de descida sempre que $\nabla f(x_k) \neq 0$ pode ser facilmente mostrado - basta notar que

$$f'(x_k; -\nabla f(x_k)) = -\nabla f(x_k)^T \nabla f(x_k) = -\|\nabla f(x_k)\|^2 < 0.$$

Além de ser uma direção de descida, o negativo do gradiente também é o método da direção mais íngreme. Isso significa que a direção normalizada $-\nabla f(x_k)/\|\nabla f(x_k)\|$ corresponde à derivada direcional mínima entre todas as direções normalizadas. Uma afirmação formal e prova são dadas no seguinte resultado.

Lema 2. Seja f uma função continuamente diferenciável e seja $x \in \mathbb{R}^n$ um ponto não estacionário ($\nabla f(x) \neq 0$). Então, $d = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ uma direção ótima de

$$\min_{d \in \mathbb{R}} f'(x; d): \|d\| = 1 \quad (1)$$

Prova. Desde que $f'(x; d) = \nabla f(x)^T d$, o problema (1) é o mesmo que $\min_{d \in \mathbb{R}} \nabla f(x)^T d: \|d\| = 1$.

Pela desigualdade de Cauchy - Schwarz temos

$$\nabla f(x_k)^T \geq -\|\nabla f(x)\| \cdot \|d\| = -\|\nabla f(x)\|.$$

Assim, $-\|\nabla f(x)\|$ são um limite inferior no valor ótimo de (1). Por outro lado, Conectando

$d = \frac{\nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|}$ na função objetivo de (1) obtemos que

$$f' \left(x, -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|} \right) = -\nabla f(x)^T \left(\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|} \right) = -\|\nabla f(x)\|$$

e assim chegamos à conclusão de que o limite inferior $-\|\nabla f(x)\|$ é atingido em $d = \frac{\nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|}$,

o que implica prontamente que esta é uma solução ótima de (1).

Vamos agora apresentar o método do gradiente com o critério de parada padrão, que é a condição $\|\nabla f(x_{k+1})\| \leq \varepsilon$.

3.1 O MÉTODO DE GRADIENTE

Entrada: $\varepsilon > 0$ - parâmetro de tolerância.

Inicialização: Escolha $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrariamente.

Passo geral: Para qualquer $k = 0, 1, 2, \dots$ execute os seguintes passos:

- Escolha um tamanho de passo t_k por um procedimento de busca linear na função $g(t) = f(x_k - t\nabla f(x_k))$.
- Defina $x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k)$.
- Se $\|\nabla f(x_{k+1})\| \leq \varepsilon$, então PARE e x_{k+1} é a saída.

Exemplo 1 (busca linear exata). Considere o problema de minimização bidimensional

$$\min_{x \in \mathbb{R}} x^2 + 2y^2 \quad (2)$$

cuja solução ótima é $(x, y) = (0, 0)$ com valor ótimo correspondente. Para invocar o método do gradiente com tamanho de passo escolhido por busca linear exata, construímos uma função no Octave, que encontra (até uma tolerância) a solução ótima de um problema quadrático da forma

$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{x^T A x + 2b^T x\}$, onde $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é definida positiva e $b \in \mathbb{R}^n$. A função invoca o método do gradiente com busca linear exata, que pelo exemplo 1 é igual na k -ésima iteração a $t_k =$

$$\frac{\|\nabla f(x_k)\|^2}{(2 \nabla f(x_k)^T A \nabla f(x_k))}.$$

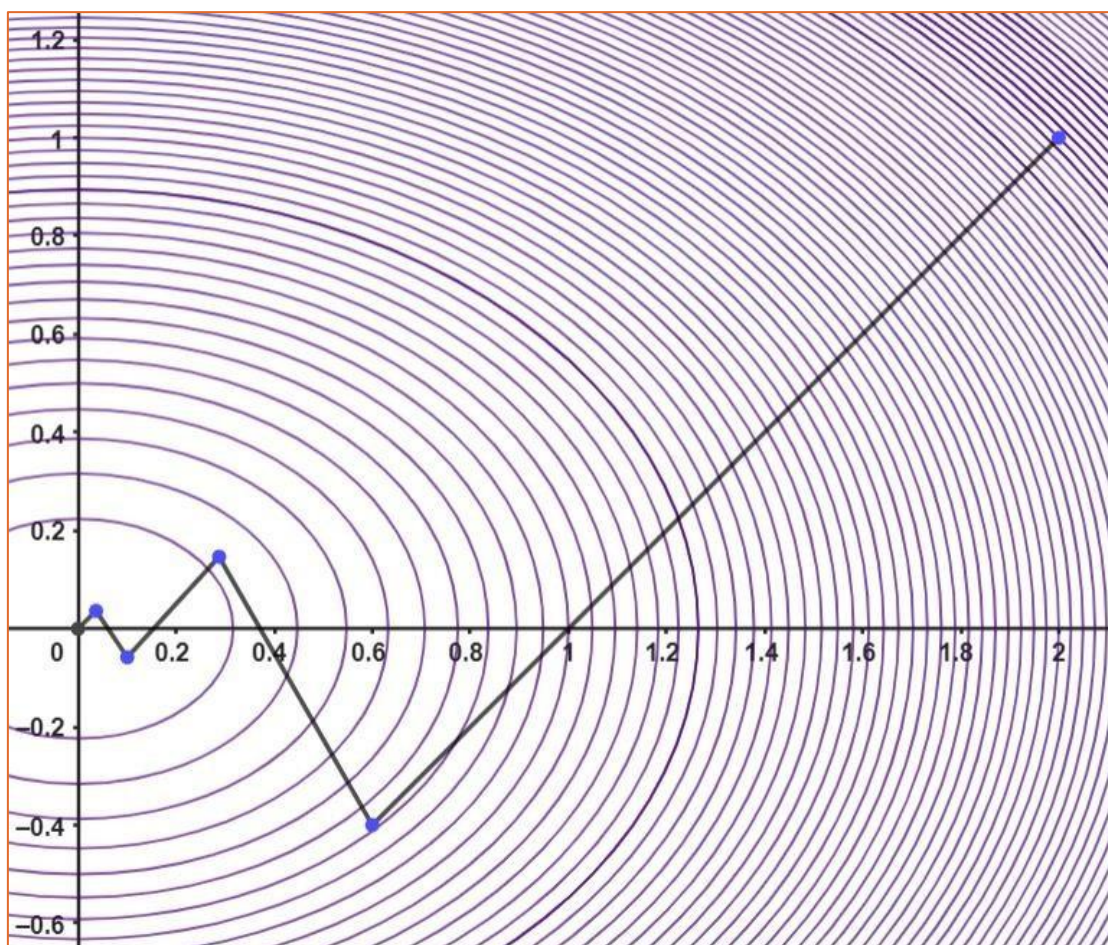
k	$\ \nabla f(x_k, y_k)\ $	$f(x_k, y_k)$
1	1.885618	0.666667
2	1.885618	0.074074
3	0.209513	0.008230
4	0.069838	0.000914
5	0.023279	0.000102

6	0.007760	0.000011
7	0.002587	0.000001
8	0.000862	0.000000
9	0.000287	0.000000
10	0.000096	0.000000
11	0.000032	0.000000
12	0.000011	0.000000
13	0.000004	0.000000

Temos a seguinte saída O método, portanto, parou após 13 iterações com uma solução bastante próxima do valor ótimo:

$$x = \begin{pmatrix} 1.0 \\ e - 005 \\ * \\ 0.1254 \\ -0.0627 \end{pmatrix}$$

Figura 1: As iterações do método de gradiente junto com as curvas de linhas da função objetivo



Fonte: os autores (2024)

Ao observar o gráfico com as curvas de nível podemos observar que as iterações estão convergindo para o ponto ótimo da função objetivo.

4 MÉTODO DE NEWTON PURO

No método anterior consideramos o problema de minimização irrestrita. Da função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\min \{f(x): x \in \mathbb{R}^n\}$, assumimos que f é continuamente diferenciável. Analisamos o método do gradiente, que utiliza apenas informações de primeira ordem, ou seja, informações sobre os valores da função e os gradientes. Neste método, assumimos que f é duas vezes continuamente diferenciável e apresentaremos um método de segunda ordem, ou seja, um método que utiliza, além das informações sobre os valores da função e os gradientes, avaliações das matrizes Hessianas. Vamos nos concentrar no método de Newton. A ideia principal do método de Newton é a seguinte: dado um iterado x_k , o próximo iterado x_{k+1} é escolhido para minimizar a aproximação quadrática da função ao redor de x_k :

$$x_{k+1} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ f(x_k) + \nabla f(x_k)^T (x - x_k) + \frac{1}{2} (x - x_k)^T \nabla^2 f(x_k) (x - x_k) \right\} \quad (3)$$

A fórmula de atualização (3) não está bem definida a menos que assumamos adicionalmente que $\nabla^2 f(x_k)$ é definida positiva. Nesse caso, o minimizador único do problema de minimização (3) é o ponto estacionário único:

$$\nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1}) = 0,$$

é o mesmo que

$$x_{k+1} = x_k - (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k) \quad (4)$$

O vetor $-(\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$ é chamado de direção de Newton, e o algoritmo induzido pela fórmula de atualização (4) é chamado de método de Newton puro. Note que, quando $\nabla^2 f(x_k)$ é definida positiva para qualquer k , as direções de Newton são direções de descida.

Método de Newton puro

Entrada: $\varepsilon > 0$ – parâmetro de tolerância.

Inicialização: Escolha um $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrariamente.

Passo geral: Para qualquer $k = 0, 1, 2$, execute os seguintes passos:

- a) Calcule a direção de Newton d_k , que é a solução do sistema linear $\nabla^2 f(x_k) d_k = -\nabla f(x_k)$.
- b) Defina $x_{k+1} = x_k + d_k$.
- c) Se $\|\nabla f(x_{k+1})\| < \varepsilon$, então PARE, e x_{k+1} é a saída.

No mínimo, o método de Newton requer que $\nabla^2 f(x)$ seja definida positiva para todo $x \in \mathbb{R}$, o que, em particular, implica que existe uma solução ótima única x^* . No entanto, isso não é suficiente para garantir a convergência, como o seguinte exemplo ilustra.

Exemplo 2. Considere a função $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ definida sobre a reta real. As primeiras e segundas derivadas de f são

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f''(x) = \frac{x}{(\sqrt{1+x^2})^3}$$

Portanto, o método (puro) de Newton tem a seguinte forma:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} = x_k - x_k(1+x_k^2) = -x_k^3.$$

Portanto, podemos observar que para $|x_0| > 1$, o método diverge, enquanto para $|x_0| < 1$, o método converge muito rapidamente para a solução correta $x^* = 0$.

Apesar de ser necessário fazer muitas suposições para garantir a convergência do método, o método de Newton possui uma característica muito atraente: sob certas condições, é possível provar uma taxa local de convergência quadrática, o que significa que, próximo à solução ótima, os erros $e_k = \|x_k - x^*\|$ (onde x^* é a solução ótima única) satisfazem a desigualdade $e_{k+1} < M e_k^2$, para algum valor positivo $M > 0$. Essa propriedade essencialmente significa que o número de dígitos de precisão é dobrado a cada iteração.

Teorema 2 (convergência local quadrática do método de Newton):

Seja f uma função continuamente diferenciável definida sobre $\mathbb{R}^n$. Assume que:

- $\exists m > 0$ tal que $\nabla^2 f(x) \geq mI$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$,
- $\exists L > 0$ tal que $\|\nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(y)\| \leq L\|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Seja $\{x_k\}$ a sequência gerada pelo método de Newton, e seja x^* o único minimizador de f em $\mathbb{R}^n$. Então, para qualquer k , a seguinte desigualdade

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{L}{2m} \|x_{k+1} - x^*\|^2 \quad (5)$$

é válida. Além disso, se $\|x_0 - x^*\| \leq \frac{m}{L}$, então

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L}{2m} \|x_0 - x^*\|^2 \quad (6)$$

Prova. Seja k um número inteiro não negativo. Então,

$$x_{k+1} - x^* = x_k - (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k) - x^*$$

Sabemos que $\nabla f(x^*) = 0$, então podemos escrever:

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= x_k - x^* - (\nabla^2 f(x_k))^{-1} (\nabla f(x^*) - \nabla f(x_k)) \\ &= x_k - x^* + (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \int_0^1 [\nabla^2 f(x_k + t(x^* - x_k))] (x^* - x_k) dt \\ &= (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \int_0^1 [\nabla^2 f(x_k + t(x^* - x_k)) - \nabla^2 f(x_k)] (x^* - x_k) dt \end{aligned}$$

Ao combinar esta igualdade com o fato de que $\nabla^2 f(x_k) \geq mI$ implica que $\|(\nabla^2 f(x_k))^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\| &\leq \|(\nabla^2 f(x_k))^{-1}\| \left\| \int_0^1 \|\nabla^2 f(x_k + t(x^* - x_k)) - \nabla^2 f(x_k)\| \|x^* - x_k\| dt \right\| \\ &\leq \|(\nabla^2 f(x_k))^{-1}\| \int_0^1 \|\nabla^2 f(x_k + t(x^* - x_k)) - \nabla^2 f(x_k)\| \|x^* - x_k\| dt \\ &\leq \|(\nabla^2 f(x_k))^{-1}\| \int_0^1 \|\nabla^2 f(x_k + t(x^* - x_k)) - \nabla^2 f(x_k)\| \cdot \|x^* - x_k\| dt \\ &\leq \frac{L}{m} \int_0^1 t \|x_k - x^*\|^2 dt = \frac{L}{2m} \|x_k - x^*\|^2. \end{aligned}$$

Provaremos a desigualdade (6) por indução sobre k . Note que para $k=0$, assumimos que:

$$\|x_0 - x^*\| \leq \frac{m}{L}$$

Assim, em particular

$$\|x_0 - x^*\| \leq \frac{2m}{L} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^0}$$

Estabelecendo assim a base da indução. Suponha que (6) seja válida para um inteiro k , ou seja, $\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{L}{2m} \|x_k - x^*\| \leq \frac{L}{2m} \left(\frac{2m}{L} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k}\right)^2 = \frac{2m}{L} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k+1}}$, prova-se assim, o resultado desejado.

Exemplo 4. Considere o problema de minimização.

$$\min_{x,y} 100x^4 + 0.01y^4$$

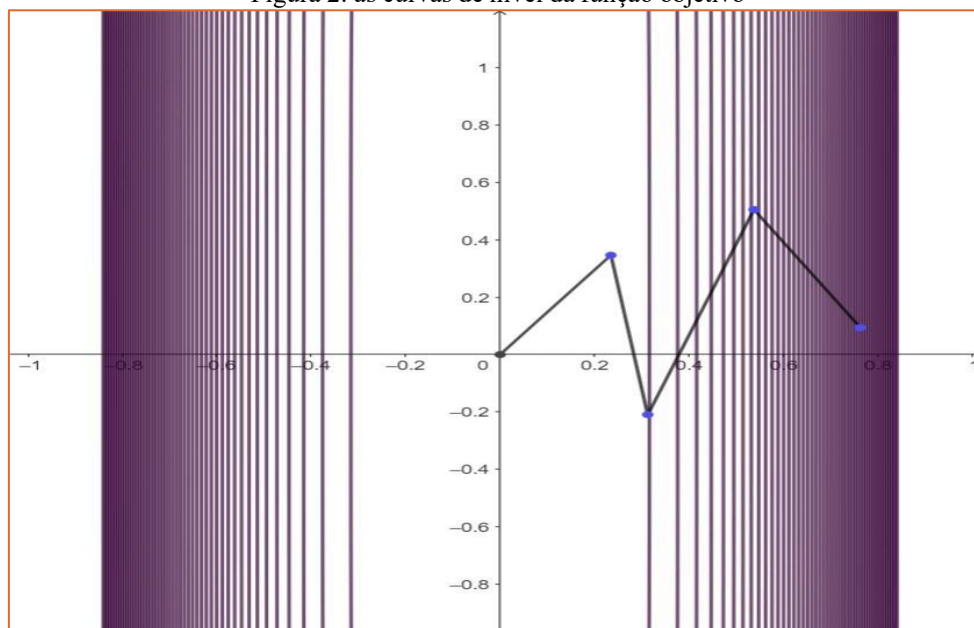
cujas solução ótima é $(x,y) = (0,0)$. O método do gradiente com o vetor inicial $x_0 = (1,1)^T$ e parâmetros $(s, \alpha, \beta, \epsilon) = (1, 0.5, 0.5, 10^{-6})$ converge após a enorme quantidade de 14612 iterações.

Aplicando o método de Newton puro, obtemos convergência após apenas 17 iterações. A seguir temos os valores obtidos nas iterações.

A comparação entre os métodos de otimização Gradiente e Newton revela diferenças significativas em termos de eficiência e rapidez na convergência. Enquanto o método de Gradiente necessitou de 14.612 iterações para alcançar a convergência, o método de Newton demonstrou uma convergência muito mais rápida, completando o processo em apenas 17 iterações. Essa diferença pode ser atribuída ao fato de que o método de Newton utiliza a informação de segunda ordem (a matriz Hessiana), o que permite uma abordagem mais precisa e uma atualização mais eficiente dos pontos de busca. Em contrapartida, o método de Gradiente, embora mais simples, depende apenas da derivada de primeira ordem e, portanto, pode sofrer com uma taxa de convergência mais lenta, especialmente em problemas mais complexos. Esse estudo reforça a vantagem do método de Newton em termos de velocidade de convergência, mas também destaca a necessidade de boas aproximações iniciais para garantir seu bom desempenho.

k	$f(x_k, y_k)$
1	19.7550617284
2	3.9022344155
3	0.7708117364
.	.
.	.
15	0.000000027
16	0.000000005
17	0.000000001

Figura 2: as curvas de nível da função objetivo



Fonte: os autores (2024)

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho abordou os métodos de gradiente e de Newton puro para otimização, destacando suas principais vantagens e limitações. O método de gradiente mostrou-se eficaz para problemas de grande escala devido ao seu baixo custo computacional, embora possa ter convergência lenta e sensibilidade à taxa de aprendizado. Já o método de Newton puro ofereceu uma convergência mais rápida e precisa.

Os exemplos práticos no Octave ajudaram a ilustrar as diferenças entre os métodos e sua eficiência em contextos específicos. Como continuidade, propõe-se o estudo do método de Levenberg-Marquardt, que combina elementos dos métodos de gradiente e de Newton, oferecendo uma abordagem mais robusta para otimização em problemas não-lineares complexos.

REFERÊNCIAS

BECK, Amir. *Introduction to nonlinear optimization: theory, algorithms, and applications with MATLAB*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2017.

CHAPRA, Steven C. *Métodos numéricos aplicados com MATLAB® para engenheiros e cientistas*. 3. ed. Porto Alegre: AMGH Editora, 2013.

SOLLERO, P. *Numerical methods for engineers: SC Chapra & RP Canale*. New York: McGraw-Hill, 1992. 812 p. ISBN 0-07-079984-9.

TÉCNICAS DE MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO NO EGITO ANTIGO: UMA ANÁLISE HISTÓRICA E MATEMÁTICA

  10.56238/livrosindi202535-018

Erik Leão Cavalcante

E-mail: erik.cavalcante@cameta.ufpa.br

Geovane Nunes Garcia

E-mail: geovane.garcia@cameta.ufpa.br

Jessica Pinheiro Gonçalves

E-mail: jessica.goncalves.@cameta.ufpa.br

Luzimara Wanzeler Moraes

E-mail: luzimara.moraes@cameta.ufpa.br

Paola Wanzeler Dias

E-mail: paola.dias@cameta.ufpa.br

RESUMO

O presente artigo explora as técnicas de multiplicação e divisão utilizadas pelos matemáticos do Egito Antigo. Baseando-se em evidências arqueológicas e textos matemáticos antigos, discutimos os métodos egípcios de multiplicação e divisão, que envolvem princípios de duplicação e decomposição. Estas técnicas, embora rudimentares em comparação com os métodos modernos, representam um avanço significativo na matemática antiga. A análise detalha a aplicação prática desses métodos e sua relevância no contexto histórico da matemática.

Palavras-chave: Multiplicação, Divisão, Egito Antigo, Métodos matemáticos.

1 INTRODUÇÃO

A matemática no Egito Antigo representa uma parte crucial da história da matemática, particularmente no que diz respeito às operações aritméticas básicas como multiplicação e divisão. Os conceitos-chave relacionados a esses métodos incluem a duplicação e a adicionalidade, que eram usados para simplificar e sistematizar os cálculos. A multiplicação egípcia frequentemente envolvia a repetição de adições, enquanto a divisão era baseada em subtrações repetidas e na aplicação de duplicações. Esses métodos aritméticos refletem uma abordagem prática e engenhosa para resolver problemas complexos com os recursos disponíveis na época.

A importância do relato sobre a multiplicação e divisão egípcias reside na compreensão de como essas técnicas rudimentares, mas eficazes, desempenhavam um papel fundamental na administração e na economia do Egito Antigo. Essas operações não eram apenas exercícios matemáticos abstratos, mas ferramentas essenciais para a gestão de terras, a

coleta de impostos e a construção de monumentos. O estudo dessas técnicas oferece uma visão valiosa sobre a capacidade dos matemáticos egípcios de enfrentar desafios complexos e aplicar conceitos matemáticos de maneira prática.

Escrever sobre as técnicas egípcias de multiplicação e divisão é essencial para preencher lacunas no conhecimento histórico e matemático. Embora as matemáticas egípcias não sejam tão amplamente discutidas quanto as contribuições gregas e romanas, elas representam uma fase crucial no desenvolvimento das operações aritméticas. A análise desses métodos proporciona insights sobre a evolução das técnicas matemáticas e ajuda a contextualizar o avanço das práticas aritméticas ao longo da história.

Essas técnicas surgiram em resposta a problemas práticos específicos enfrentados pelos egípcios, como a necessidade de medir terras com precisão e calcular impostos de maneira justa. Com o aumento da complexidade na administração de recursos e a construção de grandes projetos, os matemáticos egípcios precisavam de métodos sistemáticos para realizar cálculos rapidamente e com precisão. Portanto, a multiplicação e a divisão eram essenciais para lidar com esses desafios de maneira eficiente.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico foi embasado em trabalhos de historiadores e matemáticos que estudaram a matemática egípcia, garantindo que a interpretação das técnicas esteja alinhada com os estudos históricos e arqueológicos contemporâneos.

Esta metodologia visa não apenas descrever as técnicas de multiplicação e divisão egípcias, mas também analisar sua eficácia e a lógica subjacente a esses métodos, proporcionando uma compreensão mais completa da matemática praticada no Egito Antigo.

2.1 A MATEMÁTICA NO EGITO ANTIGO

A matemática egípcia foi fundamental para o desenvolvimento de várias áreas da sociedade, incluindo a arquitetura, a engenharia e a administração. Os egípcios possuíam um sistema numérico baseado em uma notação hierática e decimal, o que lhes permitia representar números grandes com bastante precisão. No entanto, foi observado, que a matemática egípcia não era necessariamente algébrica ou abstrata, mas prática e voltada para aplicações cotidianas, como medições de terra, construção de pirâmides e cálculo de áreas.

2.2 O PAPIRO DE RHIND E OS MÉTODOS DE CÁLCULO

O Papiro de Rhind (ou Papiro de Ahmes), datado de cerca de 1650 a.C., é uma das fontes mais importantes para o estudo da matemática egípcia. Ele contém uma série de problemas matemáticos, incluindo cálculos de áreas, volumes e operações aritméticas como multiplicação e divisão. De acordo com Gillings (1972), o Papiro de Rhind fornece a primeira evidência documentada de que os egípcios usavam o método de duplicação para multiplicação e a técnica de decomposição para divisão.

3 METODOLOGIA

Para investigar as técnicas de multiplicação e divisão empregadas no Egito Antigo, foi utilizada uma abordagem qualitativa, baseada em pesquisa documental e análise histórica de fontes primárias e secundárias. A metodologia adotada inclui:

3.1 ANÁLISE DOCUMENTAL

Fontes Primárias: A análise se concentrou em documentos históricos como o Papiro de Rhind e o Papiro de Moscou, que contêm registros detalhados das operações matemáticas realizadas pelos egípcios. Esses documentos foram traduzidos e interpretados por especialistas ao longo do tempo, permitindo uma compreensão mais aprofundada das técnicas utilizadas.

Fontes Secundárias: Revisão de estudos acadêmicos e artigos publicados sobre a matemática egípcia, abordando teorias sobre os métodos de cálculo e as interpretações dos processos matemáticos descritos nos papiros.

3.2 RECRIAÇÃO DE TÉCNICAS EGÍPCIAS

Para compreender melhor as estratégias de cálculo, foram realizadas simulações das operações descritas nos documentos históricos. Por exemplo, para a multiplicação, utilizou-se o método de duplicação egípcio, que consiste em dobrar sucessivamente um número até obter o resultado desejado. Para a divisão, empregou-se o método de decomposição baseado na subtração sucessiva. As simulações permitiram observar a lógica e a praticidade das técnicas, comparando-as com métodos contemporâneos para verificar sua eficiência.

4 ANÁLISE HISTÓRICA E COMPARATIVA:

A metodologia também incluiu uma análise do contexto cultural e social em que essas técnicas matemáticas foram desenvolvidas, discutindo a importância das operações de multiplicação e divisão no cotidiano do Egito Antigo, especialmente em relação à agricultura, construção civil e administração estatal.

Comparação com métodos de outras civilizações antigas, como a Mesopotâmia, para entender possíveis influências e diferenças nas abordagens matemáticas.

5 ANÁLISE DE DADOS

A análise dos dados obtidos a partir das fontes históricas, simulações e referências acadêmicas permitiu uma compreensão detalhada das técnicas de multiplicação e divisão usadas no Egito Antigo. A seguir, são apresentadas as principais observações, organizadas de acordo com as operações analisadas:

5.1 MULTIPLICAÇÃO EGÍPCIA: O MÉTODO DA DUPLICAÇÃO

O método de multiplicação egípcio, comumente conhecido como "duplicação", era baseado na repetição de adições sucessivas, ou seja, dobrando números para alcançar o produto desejado. Este método utilizava uma tabela em que as multiplicações eram realizadas a partir da soma de números duplicados (isto é, múltiplos de 2).

5.2 EXEMPLO DE MULTIPLICAÇÃO:

Para multiplicar 18 por 7, os egípcios poderiam seguir os seguintes passos: Começavam com o número 1, duplicando-o sucessivamente (1, 2, 4, 8, 16, etc.).

Quando o número 7 fosse alcançado, a soma das duplicações correspondentes aos múltiplos de 7 (neste caso, $16 + 2$) indicaria a multiplicação ($16 + 2 = 18$, ou seja, 18×7).

A simulação deste método mostrou que ele era eficaz, embora mais demorado que o método tradicional de multiplicação contemporâneo. No entanto, ele não requeria o conhecimento de tabelas de multiplicação ou multiplicações complexas, tornando-o mais acessível e prático para os egípcios.

5.3 DIVISÃO EGÍPCIA: A TÉCNICA DA DECOMPOSIÇÃO

A divisão no Egito Antigo era realizada com base na decomposição do divisor, o que implicava subtrair múltiplos do divisor do número a ser dividido até que o restante fosse menor que o divisor. Isso poderia envolver uma série de operações de subtração até encontrar o quociente.

5.4 EXEMPLO DE DIVISÃO:

Para dividir 45 por 6, os egípcios poderiam fazer: dividir 45 por 6 e encontrar múltiplos de 6 que somam até 45. Os múltiplos de 6 seriam 6, 12, 18, 24, 30, 36 e 42.

Somar os múltiplos mais próximos de 45: $36 + 6 = 42$. O resultado é obtido somando os múltiplos de 6: 7 (pois $36 + 6 = 42$, faltando 3 para alcançar 45).

Ao simular a divisão por decomposição, foi observado que essa técnica, embora relativamente simples, exigia um número considerável de operações para alcançar o resultado exato, especialmente em divisões mais complexas. No entanto, como a matemática egípcia era prática e voltada para necessidades cotidianas, os egípcios provavelmente usavam esse método apenas para divisões com divisores menores.

6 COMPARAÇÃO COM OUTROS MÉTODOS ANTIGOS

A análise comparativa revelou que, embora a multiplicação e a divisão egípcias fossem eficientes para os problemas que enfrentavam, os métodos de outras civilizações, como os babilônios e os mesopotâmios, eram mais avançados em termos de algoritmos formais, já que utilizavam um sistema posicional e números mais sofisticados. Contudo, a matemática egípcia era notavelmente prática e eficaz para as tarefas específicas de sua sociedade, como o cálculo de áreas e volumes, que eram fundamentais para a administração agrícola e a construção.

7 EFICIÊNCIA DAS TÉCNICAS

Em termos de eficiência, os métodos egípcios de multiplicação e divisão não eram os mais rápidos, mas eram consideravelmente simples e acessíveis. Eles evitavam a necessidade de memorização de tabelas e facilitavam o cálculo com números grandes, algo essencial para a sociedade egípcia que lidava com grandes quantidades de terra e recursos. A duplicação, por exemplo, era uma forma eficiente de calcular sem recorrer a recursos adicionais.

8 APLICAÇÕES NO COTIDIANO EGÍPCIO

As técnicas de multiplicação e divisão eram amplamente aplicadas no cotidiano egípcio, especialmente na administração de recursos agrícolas, na construção de monumentos e na divisão de terras. A análise histórica sugere que essas operações eram utilizadas por escribas e administradores para calcular impostos, áreas de cultivo e até mesmo na distribuição de materiais para obras públicas.

A partir dos dados analisados, conclui-se que as técnicas de multiplicação e divisão no Egito Antigo, embora simples em comparação com métodos posteriores, eram perfeitamente adequadas às necessidades da sociedade egípcia. A duplicação e a decomposição permitiam realizar cálculos de forma prática e funcional, sendo instrumentos poderosos para os egípcios na administração de suas atividades cotidianas.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo das técnicas de multiplicação e divisão no Egito Antigo revela uma complexidade e sofisticação notáveis no desenvolvimento da matemática antiga. Embora os egípcios não utilizassem um sistema posicional como o nosso, suas abordagens para a multiplicação e a divisão demonstram uma habilidade notável para resolver problemas matemáticos de forma eficaz.

Historicamente, as técnicas egípcias, como a multiplicação por duplicação e a divisão por decomposição, não apenas facilitavam cálculos cotidianos, mas também desempenhavam um papel crucial na administração de recursos e na construção de projetos monumentais. Esses métodos mostram uma abordagem prática e engenhosa para lidar com operações matemáticas usando ferramentas limitadas e uma compreensão profunda de seus princípios matemáticos.

Matematicamente, a análise das técnicas egípcias oferece uma perspectiva fascinante sobre a evolução das práticas matemáticas. As estratégias de multiplicação e divisão evidenciam a adaptação dos egípcios às suas necessidades econômicas e sociais, utilizando algoritmos baseados em princípios fundamentais que, embora diferentes dos métodos modernos, eram extremamente eficazes em seu contexto.

Em conclusão, as técnicas de multiplicação e divisão do Egito Antigo não devem ser vistas apenas como curiosidades históricas, mas como marcos importantes na evolução da matemática. Elas ilustram a criatividade e a engenhosidade dos matemáticos da antiguidade, cujas soluções ainda influenciam a forma como entendemos e aplicamos a matemática hoje. O estudo dessas técnicas não só nos proporciona uma visão do passado, mas também nos permite apreciar a continuidade e a inovação no desenvolvimento do conhecimento matemático ao longo dos séculos.

REFERÊNCIAS

GILLINGS, Richard J. *Matemática no tempo dos faraós*. Tradução de Renato L. B. Simões. São Paulo: Companhia das Letras, 2000.

MARTINS, Maria do Carmo. Multiplicações e divisões faraônicas. *Correio dos Açores*, p. 14, 2015.

ESTÁGIO SUPERVISIONADO: EXPERIÊNCIAS E VIVÊNCIAS INCLUSIVAS EM MATEMÁTICA

  10.56238/livrosindi202535-019

Leandro Farias Ferreira

E-mail: leandro.ferreira@cametá.ufpa.br

Leonardo de Nazaré da Silva

E-mail: leonardo.nazare.silva@cameta.ufpa.com.br

Denivaldo Pantoja da Silva

E-mail: denivaldo@ufpa.br

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo relatar experiências de estágio em Educação Especial/Inclusiva realizada em uma escola municipal da rede pública, no município de Cametá, no estado do Pará. O relato analisa as práticas docentes inclusivas na disciplina de Matemática, no 8º ano do ensino fundamental. Fundamentado nas teorias de Mantoan (2013), que defende práticas de ensino inclusivas, e as abordagens de ensino adaptado de Pletsch (2015) e Carvalho (2017), além das teorias construtivistas de Piaget (1976) e Vygotsky (2007). O estudo utilizou observação participante em sala de aula, além da análise de diferentes didáticas voltadas para o ensino. Os resultados mostram que recursos adaptativos e o apoio dos professores auxiliares, favorecem a inclusão, promovendo autonomia e engajamento dos alunos com deficiência, além dos desafios enfrentados durante o processo de ensino e aprendizagem em Matemática.

Palavras-chave: Inclusão, Educação Especial, Matemática, Ensino.

1 INTRODUÇÃO

O presente relato de experiência analisa práticas docentes vivenciadas durante o Estágio Supervisionado III, disciplina do curso de Licenciatura Plena em Matemática, com ênfase na Educação Especial/Inclusiva. A educação especial atende alunos com deficiência, transtornos de desenvolvimento e altas habilidades, abrangendo também aqueles com necessidades educacionais especiais, como dificuldades de aprendizagem e outros transtornos de desenvolvimento. Esse atendimento visa a inclusão em ambientes escolares regulares, com adaptações que favoreçam o aprendizado e promovam a participação plena.

O estágio foi realizado nas turmas de 8º ano A e B do ensino fundamental em uma escola municipal da rede pública, localizada na cidade de Cametá, Pará. A instituição atende alunos com deficiências diversas, incluindo Síndrome de Down, Transtorno do Déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH), Dislexia, Deficiência Intelectual e Transtorno do Espectro Autista (TEA). Nas turmas observadas, cada aluno com deficiência é acompanhado

por um professor especializado, acompanhamos um aluno com Deficiência Intelectual (8º ano A) e um aluno com TEA (8º ano B), analisando como a escola e os professores adaptavam o ensino de Matemática para atender suas necessidades. Esse estágio é obrigatório e visa formar futuros docentes para atender as demandas dos alunos com necessidades educacionais especiais, conforme estabelecido pela Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (LBI), também conhecida como Estatuto da Pessoa com Deficiência (Lei nº 13.146/2015), que assegura direitos e garantias para promover a inclusão e acessibilidade em todas as esferas, incluindo a educação.

Considerando que o ensino de Matemática exige abordagens diferenciadas para que os alunos com deficiência possam compreender os conceitos de forma significativa, os professores especializados adotaram práticas como o uso de materiais manipulativos como: blocos, figuras geométricas, ábacos, além de jogos matemáticos e atividades lúdicas, na tentativa de possibilitar que esses alunos internalizem os conceitos matemáticos de maneira adequada às suas limitações. A conexão da Matemática com situações cotidianas foi outra estratégia utilizada para promover um aprendizado acessível e inclusivo, respeitando as particularidades de cada aluno.

Diante deste contexto educacional, o relato busca responder a seguinte questão: *Quais práticas e adaptações são eficazes para a inclusão de alunos com necessidades especiais no ensino de Matemática?* Para construir uma resposta para essa questão, esse trabalho foi fundamentado na exploração dos conceitos de inclusão com base em Mantoan (2013), e as abordagens de ensino adaptado de Pletsch (2015) e Carvalho (2017), além das teorias construtivistas de Piaget (1976) e Vygotsky (2007). A Metodologia utilizada descreve a observação das práticas inclusivas por meio de uma abordagem qualitativa. Na Análise de Dados, serão avaliados os impactos das adaptações das práticas de ensino e para finalizar discutiremos sobre os avanços e desafios da educação inclusiva.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico deste trabalho baseia-se nas teorias de inclusão e nos pressupostos construtivistas para o ensino de Matemática na Educação Especial. Conforme Mantoan (2013), a inclusão não é apenas inserir alunos com deficiência em um sistema tradicional, mas reformular práticas pedagógicas para assegurar sua participação ativa e equitativa, promovendo um ambiente que acolha e valorize a diversidade.

No ensino de Matemática, as abordagens propostas por Pletsch (2015) e Carvalho (2017) destacam a importância de materiais concretos e atividades lúdicas, facilitando o

aprendizado de alunos com deficiência intelectual. Esse uso de recursos permite a construção do conhecimento de forma acessível, possibilitando que os alunos internalizem conceitos abstratos por meio de interações significativas.

As teorias de desenvolvimento cognitivo de Piaget (1976) e Vygotsky (2007) embasam a aplicação de uma abordagem construtivista. Para Piaget, a aprendizagem ocorre pela interação ativa com o ambiente, promovendo autonomia no processo de construção do conhecimento. Vygotsky, por sua vez, sublinha o papel da mediação, especialmente relevante na Educação Especial, ressaltando a adaptação de estratégias de ensino e o suporte contínuo oferecido por educadores e colegas mais experientes.

Assim, o referencial teórico fundamenta-se nas concepções de inclusão de Mantoan, nas práticas adaptativas sugeridas por Pletsch e Carvalho, e nas teorias construtivistas de Piaget e Vygotsky, estabelecendo uma base sólida para um ensino inclusivo e acessível em Matemática.

3 METODOLOGIA

A metodologia adotada é qualitativa e descritiva, fundamentada na observação participante das práticas de ensino adaptadas para a inclusão de alunos com deficiência. A coleta de dados foi realizada por meio de observações diretas, registrando o engajamento e a interação dos alunos com as atividades, suas dificuldades e avanços.

As aulas foram estruturadas em três etapas: introdução do conceito matemático, prática das atividades e uma avaliação formativa adaptada. Na introdução, os conceitos eram apresentados de forma clara, com exemplos facilitadores. A etapa prática envolvia atividades interativas, consolidando o aprendizado de maneira dinâmica. Por fim, a avaliação formativa permitia observar o entendimento de cada aluno.

Os registros das observações foram organizados para identificar padrões de resposta, avanços e desafios enfrentados pelos alunos durante as atividades.

4 ANÁLISE DE DADOS

A análise dos dados observados durante o estágio supervisionado buscou avaliar o impacto das práticas inclusivas no aprendizado dos dois alunos com deficiência integrados em turmas regulares do 8º ano. A análise foi dividida em três categorias principais: adaptação curricular e metodológica, interações em sala de aula e desempenho dos alunos com deficiência.

4.1 ADAPTAÇÃO CURRICULAR E METODOLÓGICA

Para a prática de ensino direcionada ao aluno com deficiência intelectual, observamos que a professora especializada utilizava estratégias de adaptação curricular, como a simplificação de conteúdos, onde as elaborações das atividades eram limitadas ao nível de aprendizado do aluno e a utilização de materiais didáticos diferenciados, como figuras planas, objetos tridimensionais e outros a depender do conteúdo matemático estudado. Devido às limitações cognitivas do aluno com deficiência intelectual, diagnosticado com "Retardo Mental leve", a professora escolheu utilizar o livro didático do 2º ano do ensino fundamental nas aulas de Matemática, mesmo que o aluno esteja matriculado na turma do 8º ano. Essa adaptação visa atender às necessidades de aprendizado do aluno, oferecendo um conteúdo mais adequado ao seu nível de compreensão, garantindo que ele consiga acompanhar as atividades de forma mais eficiente, apesar de estar inserido em uma turma de ensino regular.

Por outro lado, o aluno com Transtorno do Espectro Autista (TEA), que também é acompanhado por um professor especializado, demonstrou condições plenas para acompanhar o conteúdo de matemática da turma regular. Diferentemente do aluno com deficiência intelectual, ele não exigiu uma adaptação metodológica específica para o aprendizado de matemática. Apenas o apoio do professor auxiliar foi necessário em alguns momentos para direcioná-lo, sem modificar o conteúdo ou a metodologia utilizada com a turma. Essa abordagem mostrou que, com o suporte adequado, o aluno com TEA pode participar plenamente das atividades regulares, beneficiando-se do mesmo conteúdo que os demais alunos.

4.2 INTERAÇÕES EM SALA DE AULA

A análise das interações entre a professora titular, os professores auxiliares e os alunos com deficiência focaram especialmente na comunicação e no suporte direto oferecido aos alunos com dificuldades específicas. O professor auxiliar desempenhou um papel essencial no acompanhamento do aluno com Transtorno do Espectro Autista (TEA), oferecendo suporte constante e direcionado para ajudá-lo a manter a concentração, especialmente durante a explicação dos conteúdos matemáticos. O suporte contínuo do professor auxiliar permitiu que o aluno acompanhasse o conteúdo no mesmo ritmo dos colegas, participando ativamente e realizando as tarefas propostas.

No caso do aluno com deficiência intelectual, acompanhado pela professora auxiliar, o suporte foi fundamental para que ele pudesse entender o conteúdo de matemática. No entanto, sua participação nas atividades foi mais limitada, dado seu ritmo de aprendizagem

mais lento e as dificuldades em compreender certos conceitos matemáticos. A professora teve que realizar adaptações frequentes no material e nas explicações, simplificando as informações e oferecendo orientações mais detalhadas. Apesar do apoio contínuo, o aluno não conseguiu acompanhar o conteúdo no mesmo ritmo da turma, necessitando de mais tempo e repetição para compreender e executar as tarefas propostas. A participação dele nas atividades foi reduzida, mas o apoio constante ajudou a garantir que ele estivesse engajado de maneira adequada dentro de suas possibilidades.

4.3 DESEMPENHO DOS ALUNOS COM DEFICIÊNCIA

Os dados sobre o desempenho dos alunos com deficiência foram coletados por meio da observação direta nas aulas de matemática, análise das atividades realizadas e registros feitos pelos professores auxiliares e a professora titular. Durante o estágio, a avaliação do desempenho levou em consideração a participação dos alunos nas atividades, a capacidade de compreender e aplicar os conceitos matemáticos e o progresso ao longo do tempo, com o uso de metodologias adaptativas e lúdicas.

Durante o período de observação do estágio supervisionado, foi realizada uma oficina de Geometria Plana para a turma do 8º ano B, conduzida por estudantes de Matemática da Universidade Federal do Pará, como parte da disciplina de Laboratório de Geometria Plana. O objetivo da oficina era demonstrar aos alunos como a Geometria Plana é aplicada nas animações de desenhos infantis. Ao final da oficina, os estudantes aplicaram uma atividade prática, onde os alunos recortaram e montaram um "paper toy", uma figura plana que, ao ser montada, se transformava em um boneco tridimensional.

Por se tratar de uma metodologia inovadora em comparação às aulas anteriores, que utilizaram o projetor para apresentar a oficina e explicaram o conteúdo de geometria plana através de desenhos animados, o aluno com TEA se manteve atento e engajado na apresentação da oficina. A abordagem visual e interativa da oficina foi eficaz para captar seu interesse, especialmente pela introdução de novos recursos, como os desenhos animados, e pela atividade prática que permitiu uma compreensão mais concreta dos conceitos geométricos. Ao final da aula, o aluno, acompanhado pelo professor auxiliar, ficou totalmente focado em montar o boneco tridimensional. Essas adaptações metodológicas foram fundamentais para o aprendizado do aluno, pois tornaram o conteúdo matemático mais acessível e concreto, usando recursos visuais e atividades práticas. O apoio contínuo do professor auxiliar também foi crucial para manter o aluno focado e engajado, permitindo-lhe participar das atividades de maneira mais independente, mas com o suporte necessário. Esse

tipo de abordagem garante uma aprendizagem significativa e inclusiva, respeitando as necessidades de cada aluno.

Figura 01 Oficina de Geometria Plana

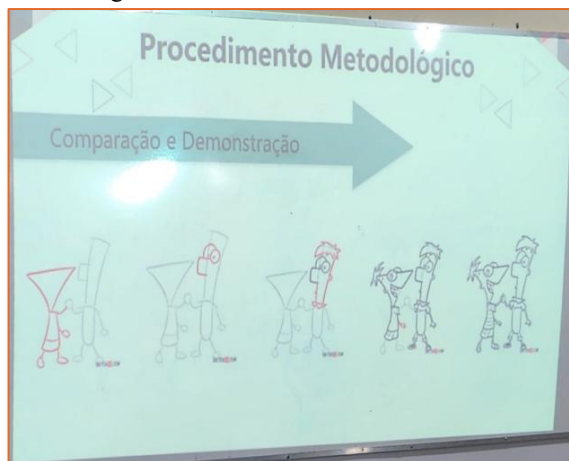
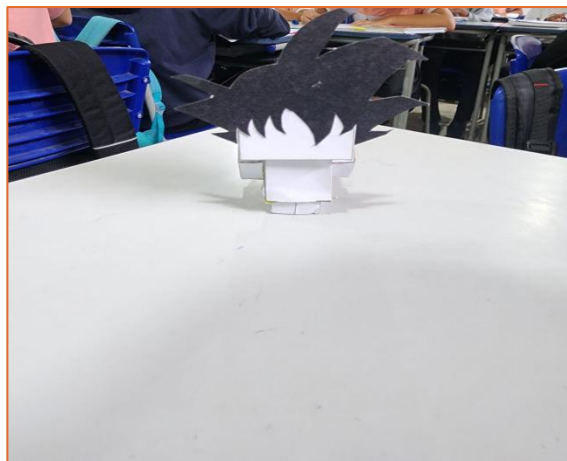


Figura 02: Atividade Paper Toy



Fonte: autoral

O conteúdo de Geometria Plana abordado na turma do 8º ano A, focado no cálculo da área de figuras planas, era certamente mais complexo e desafiador para o aluno com deficiência intelectual, especialmente porque o nível de abstração exigido por esse conteúdo é consideravelmente mais alto do que o necessário para compreender e trabalhar com a composição e decomposição de números naturais até 20, que foi a atividade proposta para ele. Essa diferença de complexidade é um ponto-chave na análise da adaptação do conteúdo, pois evidencia uma tentativa de garantir que o aluno participasse de maneira significativa nas aulas, mas dentro de um nível de compreensão adequado à sua capacidade cognitiva.

Ao final da semana, o conteúdo de Geometria foi concluído com a turma regular, com a professora titular avançando no cálculo da área das figuras geométricas planas e revisando os conceitos abordados. Para o aluno com deficiência intelectual, a professora auxiliar continuou a reforçar o reconhecimento das figuras geométricas básicas e suas características, utilizando atividades adaptadas para identificar e pintar objetos com formatos de figuras planas, como ilustrado na figura 03, afim de fixar o conteúdo de forma concreta e acessível. No entanto, apesar do esforço em oferecer suporte individualizado, ficou evidente que o aluno estava atrasado em relação à turma regular, não conseguindo acompanhar o ritmo de aprendizagem dos colegas, principalmente no que diz respeito aos conceitos mais abstratos, como o cálculo da área e perímetros, como ilustrado na figura 04, na tentativa de desenvolver a mesma atividade dos demais alunos. Isso reforça a necessidade de uma adaptação constante no conteúdo e nas abordagens pedagógicas, para que o aluno possa avançar de forma gradual,

respeitando seu ritmo de aprendizagem e alcançando os objetivos pedagógicos dentro de suas possibilidades.

Figura 03: Atividade 01 de G. Plana

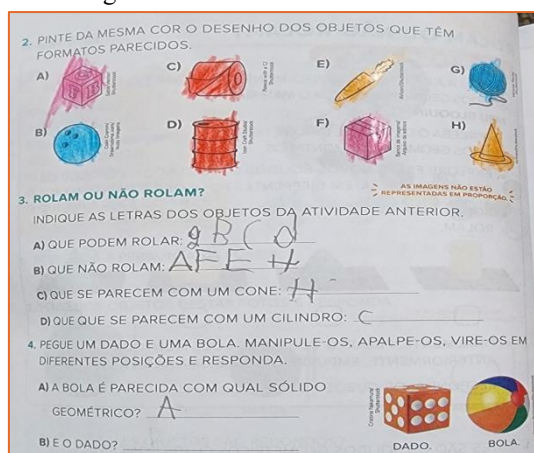
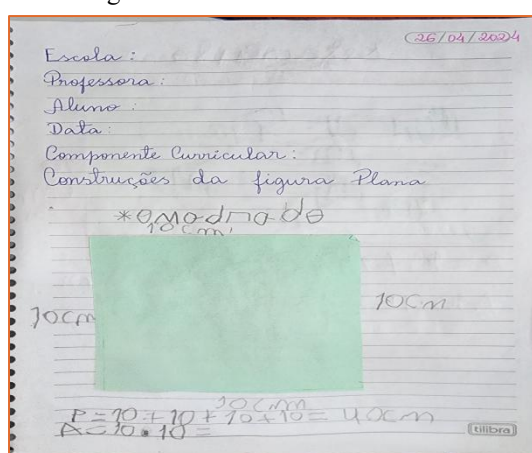


Figura 04: Atividade 02 de G. Plana



Fonte: autoral

A presença de professores auxiliares especializados é essencial para o ensino de Matemática para alunos com necessidades educacionais especiais (PCD), pois permite uma adaptação do conteúdo às suas necessidades específicas, garantindo que eles acompanhem a aprendizagem de acordo com seu ritmo. Quando a professora titular precisa dividir seu tempo entre os alunos com deficiência e os demais, isso pode prejudicar o desenvolvimento dos alunos PCD, especialmente em disciplinas mais abstratas, como a Matemática. O apoio contínuo de um professor auxiliar facilita o uso de metodologias adaptadas e recursos diferenciados, promovendo uma inclusão efetiva e evitando que os alunos fiquem atrasados em relação à turma. No entanto, a falta de professores auxiliares nas escolas públicas reforça a necessidade de políticas públicas que garantam apoio adequado para a inclusão educacional.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A experiência de estágio em uma sala de aula inclusiva permitiu observar na prática a aplicação dos princípios de educação especial, destacando os desafios e conquistas no atendimento a alunos com deficiência. Constatou-se que a presença de professores auxiliares e a adaptação de materiais e metodologias são essenciais para que esses alunos acompanhem os conteúdos.

As estratégias adaptativas, como atividades lúdicas e o uso de materiais visuais, aumentaram o engajamento e a compreensão dos alunos com deficiência. Observou-se que a ausência temporária de um professor auxiliar pode comprometer o aprendizado, evidenciando a importância de um suporte especializado contínuo.

Também foi perceptível a relevância do planejamento escolar e da formação continuada dos professores. A equipe docente mostrou-se comprometida com a inclusão efetiva, reforçando a necessidade de capacitação e apoio para atender de forma plena as necessidades de cada aluno.

Em suma, o estágio confirmou que a inclusão no ensino de Matemática exige uma abordagem adaptativa, onde o foco está no desenvolvimento integral dos alunos com deficiência. A continuidade de práticas inclusivas e a formação especializada dos professores são essenciais para promover uma educação de qualidade para todos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Lei nº 13.146, de 6 de julho de 2015. Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência). Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2015/lei/113146.htm.

CARVALHO, Rosa Maria. Práticas Inclusivas no Ensino de Matemática. Porto Alegre: Artmed, 2017.

MANTOAN, Maria Teresa Eglér. *Inclusão Escolar: O Que É? Por Quê? Como Fazer?* São Paulo: Moderna, 2003. Acesso em: 23/10/2024

PIAGET, Jean. A Psicologia da Criança. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Bertrand Brasil, 1976.

PLETSCH, Mônica De Moura. A Matemática na Educação Especial. São Paulo: Editora Vozes, 2015.

VYGOTSKY, Lev Semionovitch. Pensamento e Linguagem. 2. ed. São Paulo: Editora Martins Fontes, 2007.

ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS: UMA PROPOSTA DE EXPERIMENTO PARA O EXERCÍCIO DA EQUAÇÃO DO CALOR

  10.56238/livrosindi202535-020

César Bricio Ferrari

E-mail: ferraricezar1@gmail.com

Kaik Barreto Mourão

E-mail: kaik.mourao@icen.ufpa.br

RESUMO

As equações diferenciais parciais são grandes ferramentas matemáticas que nos possibilitam visualizar e entender diversos fenômenos químicos, físicos e biológicos. Tendo em vista as suas inúmeras aplicações, é fulcral buscar analisar, compreender e aplicar os diversos conceitos teóricos destas equações, sendo assim, analisamos a equação do calor e o método de solução de um problema com valores iniciais (método de separação de variáveis). No entanto, devido à complexidade dos conceitos envolvidos, que demandam o domínio adequado de cálculo e álgebra linear, seu ensino pode representar um grande desafio, exigindo a adoção de alternativas metodológicas variadas. Nesse sentido, o seguinte estudo propõe uma atividade prática estruturada metodologicamente nos processos de Modelagem Matemática, com o objetivo de auxiliar no ensino da equação do calor.

Palavras-chave: Equação Diferencial Parcial, Equação do Calor, Modelagem Matemática, Atividade Prática, Ensino-aprendizagem.

1 INTRODUÇÃO

Nos cursos de pós-graduações das áreas de Ciências Exatas e Naturais, as Equações Diferenciais Parciais (EDP's) formam a grade curricular obrigatória fomentando que os discentes aprendam os principais métodos de soluções e, na medida do possível, relacioná-las com eventos físicos, químicos e/ou biológicos. As EDP's são aplicadas – de forma frequente e visível – nas questões de investigação e compreensão de situações do nosso próprio cotidiano, por exemplo, na transmissão e propagação da corrente elétrica, estudo de doenças, como: o câncer, dinâmica de fluidos, a dissipação do calor, controle populacional e até acerca da percepção de ondas sísmicas. Por estes motivos, o estudo das equações diferenciais torna-se fulcrais, pois entendê-las é uma equivalência ao entendimento do próprio espaço geográfico e natural. No entanto, em muitos cursos, faltam atividades de caráter prático durante o ensino, como experimentação, que busquem fazer essa relação do conteúdo com os fenômenos presentes na realidade.

No decorrer do processo de aprendizagem de matemática no ensino superior, notamos dificuldades que frequentemente estão relacionadas ao desânimo do discente com o conteúdo. A repetição mecânica de teorias e conceitos sem aplicação prática e contextualização, desmotiva o estudante e faz com que ele não possua interesse por aquilo que estuda, causando prejuízos ao seu desempenho acadêmico e dificuldades em relacionar o que aprende em sala com o cotidiano.

Logo, é necessário que o docente busque alternativas metodológicas para incentivar, na tentativa de resgatar o discente para a aula de matemática, e assim promover o aprendizado. Nesse contexto, as atividades práticas podem servir como estratégia e auxiliar o professor a desenvolver diferentes abordagens do conteúdo para que o aluno consiga observar os fenômenos que são estudados e aqueles que estão à sua volta, em seu cotidiano (LEITE, SILVA, VAZ, 2005).

Neste sentido, produzimos este trabalho, a fim de propor uma atividade experimental prática utilizando a Modelagem Matemática (MM), para mostrar os efeitos que uma EDP explica, neste caso, a equação do calor. Dessa forma, organizamos o experimento em 5 etapas, como propõem Burak (1998, 2004 apud Burak, Klüber, 2016, p. 38-49), sendo elas: a Escolha do tema, a Pesquisa exploratória, o Levantamento do(s) problema(s), a Resolução do(s) problema(s) e a construção do conteúdo matemático e a Análise crítica da(s) solução(ões).

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O estudo das equações diferenciais surge com o entendimento das derivadas e de suas particularidades, pode-se citar três grandes nomes no desenvolvimento desse estudo, eles são: Isaac Newton, Leonhard Euler e Gottfried Leibniz. É lógico que as soluções para esses tipos de equações não eram tão simples, como são hoje, ou melhor, as ferramentas hodiernas possibilitam uma melhor visualização e compreensão dessas igualdades. É perceptível nas três leis de Newton e na lei da gravitação Universal, as quais produzem um tipo de equação diferencial que denominamos de ordinárias. Leonhard Euler foi um dos maiores matemáticos do século XIII e demonstrou suas habilidades ao produzir – na linguagem matemática – problemas envolvendo mecânica e, por conseguinte, soluções para estes, a exemplo temos a teoria dos fatores integrantes e a solução geral para equações lineares com coeficientes constantes, personificando-se na teoria de Euler- Bernoulli.

Ademais, Gottfried Wilhelm Leibniz também realizou diversas contribuições dentro desse campo de estudo, sendo visível no desenvolvimento do método da separação de variáveis e o método de solução de equações lineares de primeira ordem. Além disso, Leibniz foi o responsável pela notação de derivadas e integrais, as quais percebemos atualmente. Desta forma, percebe-se que os estudos das Equações Diferenciais tem origem há séculos atrás e é constituído não só pelas contribuições desses três grandes nomes citados, mas também, de vários outros espetaculares Matemáticos, por exemplo: Os irmãos Bernoulli, Jakob e Johann, os quais foram responsáveis pela criação e solução de situações envolvendo mecânica, equações que descreviam o movimento dos planetas, além de serem os primeiros a utilizar o conceito de Integral, como entendemos hodiernamente. Outros nomes importantíssimos foram: Louis Lagrange que mostrou que a resolução de uma equação diferencial linear homogênea de ordem n é uma combinação linear de n soluções

independentes. E, Jean Le Rond D'Alembert que foi responsável pela equação das ondas, resolvida pela sobreposição de funções opostas com mesma velocidade. Destarte, percebe-se que os estudos acerca das equações diferenciais parciais perpassam por séculos e na contemporaneidade, institutos de referências, como o IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), destinam as EDP's como principais áreas de pesquisas, elevando a quantidade de arcabouços teóricos acerca do conteúdo de pesquisa. As EDP's são um tópico complexo e o seu processo de ensino e aprendizagem pode ser desafiador devido às dificuldades conceituais, algébricas e de aplicação. Assim como é visto em conteúdos de áreas como Análise, Geometria, Álgebra, Teoria dos Números, entre outras.

Nesse contexto, para tornar acessível a aprendizagem dos conteúdos, o docente pode fazer usos de metodologias ativas, como a experimentação, que se mostra uma alternativa eficaz ao ensino tradicional. De acordo com Hodson (1988), as metodologias ativas que incorporam atividades experimentais permitem que os estudantes vivenciem experiências mais significativas e profundas, facilitando a compreensão dos conceitos de forma mais concreta.

Sendo assim, para construir a atividade experimental, com o objetivo de despertar o interesse do aluno pelo conteúdo estudado o motivando a participar da aula, o docente tem como opção utilizar a definição de atividade de MM proposta por Burak (1988, 2004), pois nessa visão o ensino se torna “dinâmico, mais vivo e, em consequência, mais significativo para o aluno e para o grupo” Burak (2004, p. 3).

Nesse cenário, o experimento proposto pelo docente contribui para tornar mais motivador e eficiente o processo de aprendizagem, tendo em vista que o discente estará explorando e investigando fenômenos naturais de forma prática e imersiva, estimulando o pensamento crítico e formulação de hipóteses sobre o tema.

De acordo com Burak (1998, 2004 apud BURAK, KLUBER, 2016, p. 38-49), o trabalho em MM é dividido em 5 etapas, sendo a primeira a **Escolha do Tema**, descrita como o momento em que o professor, no papel de mediador, e os estudantes devem escolher um tema, tratando de jogos, esportes, atividades econômicas, entre outras, que seja de interesse dos alunos. Em seguida, o docente, em rodas de conversa, desafia os discentes por meio de perguntas, suposições, contrapontos para que eles exponham suas ideias e opiniões sobre o tema. Na segunda etapa, denominada **Pesquisa Exploratória**, inicia-se o trabalho acerca do tema, conhecer suas características e aspectos, tudo o que o compõe, com o objetivo de coletar criteriosamente dados qualitativos, quantitativos e observações acerca do entendimento dos processos da atividade. Essa etapa auxilia na formação do pensamento crítico e independência do aluno.

O **Levantamento do(s) Problema(s)** constitui o terceiro momento, nele ocorre a adaptação das observações, de caráter descritivo, em possíveis dados quantitativos e interpretação dos dados

coletados na etapa anterior. Esse processo, enquanto desenvolve o pensamento lógico, contribui para o entendimento das características e fatores do objeto estudado.

A quarta etapa trata da **Resolução do(s) problema(s) e desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema**. Nessa fase serão desenvolvidos os modelos e conteúdos matemáticos referentes ao tema proposto, com base nos dados obtidos e interpretados nas etapas passadas. Segundo os autores essa etapa é extremamente rica, pois possibilita trabalhar conteúdos de forma motivadora e interessante, significando o aprendizado.

Por fim, a quinta etapa, denominada **Análise Crítica da(s) Solução(ões)**, é o momento de maior desenvolvimento do pensamento crítico e argumentativo do aluno. É a etapa que favorece as discussões de assuntos sobre o tema que extrapolam a Matemática, relacionando talvez a assuntos do contexto das Ciências Humanas e Sociais, como sociologia e cultura.

3 METODOLOGIA

3.1 CARACTERÍSTICAS DA PESQUISA

Os processos metodológicos deste estudo se deram com base em pesquisa bibliográfica. Nela buscamos compreender o conceito de metodologias ativas, tais como atividades experimentais e suas potencialidades no ensino, assim como as causas que levam a desmotivação do estudante perante ao conteúdo observado em sala de aula. E os estudos das equações diferenciais parciais foram arcabouços nas referências bibliográficas [1] e [3], buscando não apenas entender o conceito matemático, mas visualizá-lo como uma expressão do ambiente.

3.2 ETAPAS DO EXPERIMENTO

Delimitamos duas condições iniciais para o experimento, sendo elas: 1) Na borda dos materiais não tem troca de calor e 2) Sabemos toda e qualquer temperatura no comprimento da barra. Em seguida descrevemos a atividade experimental a ser desenvolvida conforme a MM:

3.3 ESCOLHA DO TEMA

Observamos que EDP's estão presentes na grade curricular dos cursos de pós-graduação em matemática, e durante o processo de ensino o discente entra em contato com o conteúdo equação do calor. Logo, escolhemos um experimento para fazer o exercício dessa equação, através da propagação de calor por condução. Cabe ao professor responsável a decisão de formar ou não grupos para realizar o experimento e formar rodas de conversa para discutir sobre o tema nessa etapa inicial, visto que é necessário a realização de algumas aulas teóricas antes do desenvolvimento da atividade.

3.4 PESQUISA EXPLORATÓRIA

O experimento consiste em analisar a propagação de calor em um sistema composto por duas latinhas, um palito de madeira, um fio elétrico e uma vela. As latinhas serão o apoio para manter o sistema a uma certa altura, e no topo de uma estará preso o palitinho e na outra o fio elétrico. Ao longo do palito e fio, será derramado um pouco de cera da vela em espaços constantes. Após isso, os estudantes deverão aquecer a ponta de cada um dos materiais e fazer a observação do processo de aquecimento, medindo com um termômetro.

Durante a coleta de dados, os discentes não devem ser dependentes do docente, este irá interferir apenas caso verifique que algum dado ou observação, fundamental para as análises da próxima etapa, não está sendo coletado. É esperado que façam a investigação das qualidades físicas desses instrumentos, por exemplo, dos fios que propagam calor de forma bidimensional, diferente do palito que não possui uma boa propagação. Além disso, com o uso do termômetro será possível determinar a temperatura dos materiais e, por conseguinte, perceber a ocorrência da propagação do calor.

3.5 LEVANTAMENTO DO(S) PROBLEMA(S)

Nesta etapa os alunos irão transformar algumas observações descritivas que fizeram na etapa passada, como os processos de propagação de calor, passagem de tempo e tipo de propagação, em dados numéricos para a possível construção de tabelas e gráficos, assim como a discussão sobre os acontecimentos do experimento, podendo estabelecer relações que permitam desenvolver diferentes modelos coerentes com o problema tratado.

A partir dos dados qualitativos, poderão investigar e conhecer os processos que estão estudando e também adicionar novas informações sobre as características dos objetos, como a composição do fio elétrico, que conduz eletricidade, ser cobre ou alumínio, bons condutores de calor.

3.6 RESOLUÇÃO DO(S) PROBLEMA(S) E CONSTRUÇÃO DO CONTEÚDO MATEMÁTICO

A investigação do fenômeno parte da observação da sua própria estrutura, isto é, primeiramente a observação do que forma este experimento. A partir dessa análise, perceber a equação do calor condicionada sobre alguns problemas de valores iniciais, por exemplo, conhecer toda a temperatura do sistema estudado e perceber que nas suas extremidades a temperatura é nula.

Isto modela a equação do calor sobre algumas condições de contorno, mostrando aos discentes o sistema descrito na figura 01.

Figura 01: Equação do calor com condições de contorno.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Fonte: Arquivo pessoal dos autores.

A análise, realizada na etapa 3, tem como objetivo que o discente obtenha este sistema, mas, é importante salientar que os métodos de soluções de EDP's devem ser trabalhados durante o curso, neste caso, dever-se-á utilizar a mudança de variável, que parte do princípio que exista uma função $u(x, t) = K(x) \cdot T(t)$ que seja solução da equação diferencial apresentada. Após essa suposição, substitui-se a função $u(x, t)$ na primeira equação que irá produzir outras duas equações diferenciais, só que agora, não mais parciais, mas sim ordinárias. Em seguida, aplica-se às condições de contorno e resolve-se as Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Por fim, para chegarmos à solução da EDP precisamos aplicar o princípio da superposição das soluções das EDOs.

3.7 ANÁLISE CRÍTICA DA(S) SOLUÇÃO(ÕES)

Nesta etapa, o discente irá refletir sobre todas as etapas anteriores, observando com detalhes todos os resultados obtidos. Ele poderá fazer uso de anotações, tabelas, gráficos, fotos e outros materiais, produzidos durante a atividade, que o docente julgar necessário. Neste viés, os alunos devem refletir acerca da potencialidade que este experimento teve para a obtenção e fixação do conteúdo de EDPs e muito além disso visualizar e em pontos tangíveis propor ações que possam ser realizadas pela coletividade para um desenvolvimento social, de forma crítica e equitativa, não se limitando apenas a academia, mas a todos os grupos sociais. A ideia de realizar este experimento é socializar uma vivência - baseada em materiais simples e de fácil acesso - que mostram um fenômeno físico e modelando-se em uma equação matemática. A criticidade desse momento baseia-se na equiparidade de possuir um ensino que possa ser aplicado em qualquer localidade, seja nos grandes centros urbanos ou nos cursos à distância, em regiões interioranas.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como se trata de uma atividade ainda não aplicada em sala de aula ou laboratório de ensino superior, neste momento, limitamo-nos a explorar seu potencial contribuição para o ensino. A atividade apresenta grande potencialidade no âmbito do ensino, por diversos motivos, entre eles: a visualização de um fenômeno físico - saindo da própria racionalidade - como também, proporcionado um momento empirista para o ensino da Matemática.

Realizamos apenas o ensaio do experimento, com o objetivo de avaliar sua viabilidade e verificar se seria capaz de cumprir os objetivos propostos. Observamos que é possível coletar dados e realizar observações, que permitem traçar o percurso metodológico proposto.

Os próprios instrumentos utilizados podem ser reconstituídos com itens mais regionais e mais acessíveis, produzindo um aparato de ensino mais amplo e utilizável em qualquer ambientação, desde que o arcabouço teórico seja bem desenvolvido.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscamos amenizar o impacto causado pela baixa motivação na aula de conteúdos de matemática, originada, em parte, pela dificuldade no entendimento dos conceitos apresentados em uma aula tradicional, com uma atividade experimental para o ensino. Visando despertar aspectos no discente, fundamentais para a sua formação como indivíduo, docente e pesquisador, como criatividade, pensamento lógico, análise crítica e independência investigativa, tudo ao colocá-lo como protagonista do processo de aprendizado por meio de metodologias ativas.

Cabe a futuras investigações, a análise e produção de novos experimentos para o ensino de diferentes conteúdos matemáticos no nível de graduação e pós-graduação, assim como o estudo de sua efetividade para a aprendizagem do discente. Também o uso de diferentes metodologias ativas, que busquem o aluno no papel principal de obtenção do conhecimento.

Compreendemos as dificuldades que podem surgir ao longo do desenvolvimento e planejamento da atividade, como gasto com materiais para o experimento, tempo previsto, espaços adequados. Afinal, não são todos os ambientes de ensino que possuem um devido laboratório para a reprodução da prática experimental, com materiais próprios para exercícios mais sofisticados.

REFERÊNCIAS

- ABUNAHMAN, S. A. *Equações diferenciais*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos Editora, 1989.
- BASSANEZI, R. C.; FERREIRA JR, W. C. *Equações diferenciais com aplicações*. 1. ed. São Paulo: Harbra, 1988.
- BOYCE, W. E. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- BURAK, D. *Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem*. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- _____. Formação dos pensamentos algébrico e geométrico: uma experiência com modelagem matemática. *Pró-Mat Paraná*, Curitiba, v. 1, n. 1, p. 32–41, 1998.
- _____. A modelagem matemática e a sala de aula. In: *ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – EPMEM*, 1., 2004, Londrina. Anais [...]. Londrina, 2004.
- BURAK, D.; KLUBER, T. Considerações sobre a modelagem matemática em uma perspectiva de Educação Matemática. *Margens: Revista Interdisciplinar*, v. 7, n. 8, p. 33–50, 2016.
- HODSON, Derek. *Experimentos na ciência e no ensino de ciências*. Tradução de Paulo A. Porto. *Educational Philosophy and Theory*, Nova Zelândia, 1988. Disponível em: <https://www.iq.usp.br/palporto/TextoHodsonExperimentacao.pdf>. Acesso em: 24 jul. 2025.
- LEITE, A. C. S.; SILVA, P. A. B.; VAZ, A. C. R. A importância das aulas práticas para alunos jovens e adultos: uma abordagem investigativa sobre a percepção dos alunos do PROEF II. *Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências*, Belo Horizonte, v. 7, n. 3, p. 166–181, 2005.
- ZILL, D. G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

A ROBÓTICA EDUCACIONAL COMO ESTRATÉGIA PARA O ENSINO DE ESCALAS E MEDIDAS: UMA EXPERIÊNCIA NAS SERIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

  10.56238/livrosindi202535-021

Vanderlan Antônio Garcia Rodrigues

E-mail: vanderlan.rodrigues@cameta.ufpa.br

Adebson Gomes Ferreira

E-mail: adebsongomes@gmail.com

Daniele Esteves Pereira Smith

E-mail: danielczyk@gmail.com

RESUMO

A robótica educacional tem se destacado como uma ferramenta pedagógica inovadora no ensino da matemática no ensino básico. O artigo tem como objetivo investigar o potencial da robótica para facilitar a compreensão de conceitos matemáticos, tornando o aprendizado mais interativo e contextualizado, ao conectar a teoria à prática. Para isso, foi realizada uma avaliação qualitativa com alunos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental, utilizando o uso de recursos pedagógicos e tecnologia como, placas de automação e plataformas digitais, entre elas destacamos o uso do Arduino e da plataforma tinkerCad como as principais ferramentas utilizadas para tornar mais acessível e lúdico o ensino da matemática. Os resultados indicam que o uso da robótica como recurso pedagógico favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico, melhora a motivação dos alunos e promove a aprendizagem colaborativa. Além disso, a robótica contribui para a resolução de problemas e estimula o pensamento crítico, permitindo que os alunos compreendam melhor os conceitos matemáticos de forma aplicada e prática. Conclui-se que com sua capacidade de promover um aprendizado mais ativo e contextualizado, a robótica facilita o desenvolvimento de competências matemáticas essenciais, ao mesmo tempo que envolve os alunos de forma prática e colaborativa.

Palavras-chave: Robótica educacional, Escalas e medidas, Metodologias ativas, Tecnologia educacional, Ensino fundamental.

1 INTRODUÇÃO

O ensino da matemática no nível básico enfrenta desafios recorrentes no que se refere ao engajamento e à motivação dos alunos, especialmente na aplicação prática de conceitos teóricos. Dessa forma, o uso da robótica educacional surge como uma estratégia promissora, especialmente no ensino de matemática, disciplina muitas vezes considerada desafiadora por alunos do ensino básico. A robótica educacional, ao aliar tecnologia e prática, oferece novas formas de apresentar e trabalhar conceitos matemáticos, aproximando a teoria das situações cotidianas e concretas.

A relevância do tema está ancorada na necessidade de superar as dificuldades tradicionais do ensino de matemática, como a abstração dos conceitos e a desmotivação dos alunos, fatores que muitas vezes resultam em baixo desempenho escolar. A utilização de ferramentas tecnológicas possibilita um ensino mais interativo, lúdico e colaborativo, promovendo o engajamento dos alunos e estimulando o desenvolvimento de habilidades essenciais, como o raciocínio lógico, a resolução de problemas e o trabalho em equipe.

Dessa forma, o artigo buscar explorar a comunicação da tecnologia com o ensino e aprendizagem da matemática. Buscando alinhar um conhecimento amplo e integrativo facilitando a adesão aos conhecimentos matemáticos, contribuindo para a construção de uma aprendizagem mais significativa, que oferecendo subsídios para a adoção de práticas pedagógicas mais inovadoras e eficazes.

Diante disso, a robótica educacional não é apenas uma ferramenta tecnológica com fim em si mesma, mas um meio de proporcionar um ambiente de aprendizagem que desperte a curiosidade e o interesse dos alunos, contribuindo para a transformação da prática educativa tradicional.

2 METODOLOGIAS ATIVAS E ROBÓTICA EDUCACIONAL

A **metodologia ativa** e a **robótica educacional** são abordagens inovadoras que transformam o processo de ensino-aprendizagem, tornando-o mais interativo e envolvente. A metodologia ativa é uma abordagem pedagógica que incentiva os alunos a participarem ativamente do processo de aprendizagem. Em vez de serem meros receptores de informações, os alunos são incentivados a explorar, investigar e construir conhecimento por meio de atividades práticas e colaborativas. Essa abordagem promove o pensamento crítico, a criatividade e a autonomia dos alunos (Ausubel, Novak, & Hanesian, 1980).

Desse modo, utilizando a robótica educacional que é uma aplicação prática da metodologia ativa, onde os alunos aprendem conceitos de ciência, tecnologia, engenharia e matemática (STEM) através da construção e programação de robôs. Essa abordagem não só desperta o interesse dos alunos pela tecnologia, mas também desenvolve habilidades importantes como resolução de problemas, trabalho em equipe e pensamento lógico.

2.1 ROBÓTICA EDUCACIONAL E O ENSINO DE ESCALAS E MEDIDAS.

A Robótica pode ser definida como “a ciência dos sistemas que interagem com o mundo real com pouca ou mesma nenhuma intervenção humana” (ARS CONSULT, 1995, p.21). É uma área multidisciplinar, que integra disciplinas como Matemática, Engenharia Mecânica, Engenharia Elétrica, Inteligência Artificial, entre outras.

Segundo o Dicionário Interativo da Educação Brasileira (2024), Robótica educacional ou Pedagógica é um termo utilizado para caracterizar ambientes de aprendizagem que reúnem materiais de sucata ou kits de montagem composto por peças diversas, motores e sensores controláveis por computadores e softwares, permitindo programar, de alguma forma, o funcionamento de modelos.

Maisonnette (2024), utiliza o termo robótica educacional e define como sendo o controle de mecanismos eletroeletrônicos através de um computador, transformando-o em uma máquina capaz de interagir com o meio ambiente e executar ações definidas por programas criados pelo programador a partir destas interações.

É uma proposta educacional, apoiada na experimentação e na errância que propõe, segundo Fróes (apud Maisonnette, 2024, p.1), “uma nova relação professor/aluno, na qual ambos caminham juntos, a cada momento, buscando, errando, aprendendo...”

É uma ferramenta que permite ao professor demonstrar na prática muitos dos conceitos teóricos, às vezes de difícil compreensão, motivando o aluno, que a todo momento é desafiado a observar, abstrair e inventar. Utiliza-se dos conceitos de diversas disciplinas (multidisciplinar) para a construção de modelos, levando o educando a uma gama enorme de experiências de aprendizagem (BESAFE, 2024).

Segundo Maisonnette (2002), com a robótica educacional, o aluno passa a construir seu conhecimento através de suas próprias observações e aquilo que é aprendido pelo esforço próprio da criança tem muito mais significado para ela e se adapta às suas estruturas mentais. O mesmo autor afirma que a utilização da robótica na educação veio, a princípio, expandir o ambiente Logo de aprendizagem. Esse novo recurso permite que haja a integração de diversas disciplinas e a simulação do método científico, pois o aluno formula uma hipótese, implementa, testa, observa e faz as devidas alterações para que o seu “robô” funcione.

Conforme os objetivos almejados, varia-se o modo de aplicação da robótica educacional: desde o estabelecimento prévio dos passos para a confecção de um modelo, o que sugere que já se saiba exatamente o produto final, até a confecção de projetos livres pelo educando, que poderá construir o dispositivo de acordo com suas ideias. “A restrição – quanto à forma ou quanto aos passos para construção – poderia servir para levar o aluno a aprender determinado tópico do conteúdo de uma disciplina” (GODOFREDO, ROMANO E ZILLI, 2001, p.3).

Pensando nisso, trouxemos o conceito de escala e medidas para os alunos, pois é fundamental que eles saibam organizar dados numéricos presentes em textos e que conseguissem mobilizá-los em diversos contextos, como aqueles relacionados a representações gráficas.

A organização de dados pode se fazer presente com relação a situações envolvendo o bloco grandezas e medidas. Nos PCN, descrito em Brasil (1997), há menção sobre a sua importância pela relevância social e pelo caráter utilitário.

Na vida em sociedade, as grandezas e as medidas estão presentes em quase todas as atividades realizadas. Desse modo, desempenham papel importante no currículo, pois mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático no cotidiano. As atividades em que as noções de grandezas e medidas são exploradas proporcionam melhor compreensão de conceitos relativos ao espaço e às formas. São contextos muito ricos para o trabalho com os significados dos números e das operações, da ideia de proporcionalidade e escala, e um campo fértil para uma abordagem histórica (BRASIL, 1997, p. 39- 40, grifo nosso).

Temos, por hipótese, que, além de ler, de interpretar e de descrever as representações gráficas, como apontado no destacado documento nacional, deve-se fazer presente um trabalho que mostre como organizar dados em tabelas e como representá-los na forma gráfica. Ainda, acreditamos que isso seja importante e possível desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

3 METODOLOGIA

O estudo foi conduzido em escolas de ensino básico, utilizando uma abordagem qualitativa para investigar a aplicação de plataformas de robótica, como Arduino IDE e TinkerCAD, no ensino de matemática.

O Arduino IDE (Intergrated Development Environment) é um software de código aberto desenvolvidos para facilitar a programação de placas Arduino. Ele é projetado para ser fácil de usar, mesmo para iniciantes, e suporta várias plataformas, incluindo Windows, macOS e Linux. Amplamente utilizado para criar e carregar códigos em microcontroladores Arduino e outros dispositivos compatíveis.

Já o TinkerCAD, é uma ferramenta online gratuita para design 3D, eletrônica e programação, desenvolvida pela Autodesk. Ele é voltado para iniciantes e é amplamente utilizado em ambientes educacionais para ensinar conceitos de STEM.

Ambas as ferramentas são alinhadas com os padrões educacionais e certificadas como seguras para crianças, sendo assim, foram observadas turmas em que essas ferramentas eram utilizadas em atividades práticas, com o intuito de analisar o impacto no aprendizado dos alunos e no engajamento nas aulas. A coleta de dados foi realizada por meio de observações diretas, entrevistas com professores e alunos, além da análise dos projetos desenvolvidos pelos estudantes durante um semestre letivo.

As atividades que envolvem o uso de robótica demonstraram resultados positivos em relação ao interesse dos alunos pelas aulas de matemática. Os estudantes que participaram de

projetos com Arduino e TinkerCAD apresentaram um entendimento mais claro de conceitos geométricos e algébricos, além de habilidades aprimoradas em resolução de problemas e trabalho colaborativo. As atividades práticas permitiram que os alunos aplicassem conceitos matemáticos de maneira concreta, favorecendo um aprendizado mais significativo e integrado.

4 ANÁLISE DE DADOS

A análise de dados foi realizada por meio da observação da participação ativa dos estudantes do 6º e 7º ano do ensino fundamental, por meio de atividades lúdicas que retrataram a matemática com uma linguagem mais tecnológica. Um exemplo disso foi o módulo de geometria plana, no qual os alunos tinham dificuldades para entender conceitos básicos de cálculo de área e perímetro. Como atividade, foi proposta a criação de um circuito matemático, onde alguns alunos utilizaram carros de controle remoto para percorrer o trajeto, trabalhando assim conceitos como medida de distância em terrenos retos e em curvas. Ao marcar o ponto de partida, eles também puderam determinar a distância percorrida usando unidades de medida usuais, como metros, centímetros, milímetros, etc. Ademais, no mesmo projeto, o circuito era composto por estações, e cada estação abordava um tópico específico do tema em questão, para que o aluno pudesse resolver, como o cálculo de área de um quadrado, o cálculo de área de um trapézio, entre outros conceitos que, por sua vez, são fundamentais no processo de construção do conhecimento geométrico.

Além disso, no 8º e 9º ano, foi desenvolvido um projeto de automação com placas de Arduino, onde os alunos, após receberem aulas sobre noções básicas de programação e automação, realizaram a atividade de construção de um medidor de distância com sensor ultrassônico. O projeto consistia em conectar o sensor ultrassônico ao Arduino e codificar a placa para que ela transformasse essa medida em centímetros, introduzindo, assim, os conceitos de proporção, escalas, estimativas, além de distâncias e medidas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sem dúvida nenhuma, a Robótica Educacional é uma alternativa interessante como ferramenta pedagógica no processo ensino-aprendizagem. É uma proposta educativa que vem de encontro às teorias e visões dos mais conceituados educadores da atualidade. No que se refere à teoria de Gardner (1995), a das Múltiplas Inteligências, além do desenvolvimento da inteligência lógico-matemática que é a mais evidente, pelo fato de trabalhar com a programação de computadores e cálculos em geral, promove o desenvolvimento da inteligência lingüística, interpessoal, intrapessoal e até da espacial, pois envolve aspectos como o trabalho em grupo,

planejamento de ações, projeto do modelo a ser construído, reconstrução do modelo e apresentação do resultado final. Permite a resolução de problemas no contexto real, possibilitando o desenvolvimento de competências e habilidades que Perrenoud (2000), defende.

Possibilita uma atividade que envolve os alunos, favorecendo o trabalho em equipe e colaborativo, desenvolvendo a responsabilidade, a disciplina, o senso de organização, a descoberta, a interação, a autoestima, a paciência, a persistência, a iniciativa, a socialização, a autonomia, a troca de experiências, entre outros. E acima de tudo, é uma prática embasada no construtivismo de Piaget (1990), onde o aluno é um ser ativo que estabelece relações de troca com o meio físico, com os colegas e com o seu próprio conhecimento, relações essas vivenciadas e significativas. Os ambientes computacionais são fundamentais para a aprendizagem, o que caracteriza a teoria da Papert (1994), o construcionismo. Aliás, a Robótica Educacional foi elaborada, a princípio, dentro da perspectiva construcionista. Neste trabalho, foi conceituado o que é a Robótica Educacional, recurso que veio como complemento da linguagem Logo de programação. Hoje, os ambientes de programação se diversificaram: alguns softwares de autoria apresentam soluções para a robótica.

Ao fim do ano letivo pudemos observar uma grande evolução nas notas em matemática dos alunos que trabalharam os projetos de robóticas, pois eles já conseguiam ver os problemas das provas como um problema dos softwares em que eles tinham que resolver para poder rodar aquela programação, sendo assim ficou muito mais fácil o entendimento nos assuntos de escala e grandezas de medidas.

O uso da robótica como estratégia pedagógica no ensino de matemática oferece uma oportunidade de transformar a maneira como os alunos aprendem e compreendem os conceitos matemáticos. Essa abordagem promove uma aprendizagem mais ativa, colaborativa e significativa. Para que essa inovação seja amplamente implementada, no entanto, é essencial que haja investimentos em capacitação docente e infraestrutura adequada. Com o apoio necessário, a robótica tem o potencial de preparar melhor os alunos para os desafios futuros, tanto na matemática quanto nas demais áreas relacionadas às STEM.

REFERÊNCIAS

- ARS CONSULT. *Apostila de introdução à robótica*. Recife, 1995. Disponível em: <http://www.arsconsult.com.br>. Acesso em: 05 nov. 2024.
- AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. *Psicologia educacional*. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.
- BESAFE. *A casa do Cyberbox*. Disponível em: <http://www.cyberbox.com.br>. Acesso em: 04 nov. 2024.
- BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática (terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental)*. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental/MEC, 1997.
- DICIONÁRIO INTERATIVO DA EDUCAÇÃO BRASILEIRA. Agência Educa Brasil. Disponível em: <http://www.educabrasil.com.br/eb/dic/dicionario.asp?id=49>. Acesso em: 05 nov. 2024.
- GARDNER, Howard. *Inteligências múltiplas: a teoria na prática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.
- GODOFREDO, Siumar; ROMANÓ, Rosana; ZILLI, Silvana. Robótica pedagógica – uma aplicação de inteligência artificial. 2001. Artigo apresentado na disciplina de Engenharia do Conhecimento. Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis.
- MAISONNETTE, Roger. A utilização dos recursos informatizados a partir de uma relação inventiva com a máquina: a robótica educativa. In: *ProInfo – Programa Nacional de Informática na Educação – Paraná*. Disponível em: <http://www.proinfo.gov.br>. Acesso em: 05 nov. 2024.
- PAPERT, Seymour. *A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.
- PIAGET, Jean. *Epistemologia genética*. São Paulo: Martins Fontes, 1990.

TECELAGEM MAIA E A MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM MULTIDISCIPLINAR COM A UNIDADE BÁSICA DE PROBLEMATIZAÇÃO

  10.56238/livrosindi202535-022

José Ivan Alves Balieiro

E-mail: ivanalvesbalieiro@gmail.com

Benedito Néto Andrade Ferreira

E-mail: nettoandrdef99@gmail.com

Daniele Esteves Pereira Smith

E-mail: danielczyk@gmail.com

RESUMO

O artigo investigou como as unidades básicas de problemas podem ser utilizadas como ferramenta mediadora entre o ensino de história e matemática. O foco esteve na cultura maia, especificamente no uso de formas geométricas utilizadas na arquitetura maia, Tecelagem Maia. O objetivo principal foi examinar como a geometria maia, apoiada por padrões matemáticos, pode melhorar o ensino da matemática e, assim, garantir a reinterpretação da compreensão matemática. A abordagem foi realizada por meio de pesquisa qualitativa e apoiada em revisão de literatura e análise de dados sobre padrões geométricos utilizados na tecelagem Maia. Com isso, pretendeu-se evidenciar que a aprendizagem no ambiente é possível através de unidades que combinam história e matemática, o que neste caso mostra a importância do patrimônio cultural e a importância que os projetos sociais atribuem ao ensino da matemática.

Palavras-chave: História da Matemática, Geometria Maia, Unidade Básica de Problematização, Ensino de Matemática.

1 INTRODUÇÃO

A conexão entre história e matemática no campo da educação tem se mostrado uma estratégia mais eficaz para melhorar o ensino de questões e necessidades. Muitas vezes, essas duas áreas do conhecimento são abordadas separadamente, mas a conexão entre elas pode proporcionar um caminho mais profundo e diferente. Portanto, a cultura maia, devido ao profundo conhecimento dos princípios geométricos da arquitetura e do planejamento espacial, mostra-se como um grande exemplo da relação entre a matemática e a história e a cultura. A estrutura geométrica da tecelagem Maia, e o complexo sistema de simetria e equilíbrio, mostram a integração dos conceitos matemáticos nas práticas sociais e religiosas, proporcionando uma boa oportunidade para o ensino multidisciplinar.

Este artigo tem como objetivo explorar como os padrões geométricos encontrados no edifício tecelagem Maia pode ser utilizada no ensino de matemática, enfatizando a relação entre história e matemática. Neste contexto, o objetivo desta pesquisa é descobrir como o problema da unidade básica (UBP) pode ser utilizado para desenvolver uma compreensão mais profunda da matemática, levando em consideração o conhecimento histórico-cultural da tribo maia. A UBP como método de ensino visa redefinir a aprendizagem da matemática através da introdução de questões colocadas no contexto escolar, o que permite aos alunos fazer conexões entre o conteúdo matemático e a realidade histórica e cultural. O objetivo é, portanto, usar a geometria maia como base para avaliação crítica e reflexiva de práticas matemáticas e culturais, expandindo assim a compreensão dos alunos sobre conceitos geométricos em ambientes além da sala de aula típica.

Para uma integração efetiva entre a história da matemática e a pedagogia em sala de aula, geralmente opta-se por métodos de ensino ativos. Esses métodos estimulam os estudantes a participarem ativamente no aprendizado, tornando-os protagonistas do seu próprio crescimento. Especificamente, a Unidade Básica de Solução de Problemas (UBP) atua como um instrumento eficiente para promover essa integração. A UBP é uma abordagem que emprega questões e solução de problemas como base para o aprendizado. Ela resgata práticas sociais de épocas passadas e incentiva os estudantes a reavaliarem seu conhecimento de maneira crítica e reflexiva. Esta metodologia possibilita aos estudantes não só assimilar conceitos matemáticos, mas também ponderar sobre as circunstâncias e questões que os motivaram o aparecimento e evolução do saber matemático ao longo da história.

De acordo com Beltran, Saito e Trindade (2014, pp. 17-18), essa historiografia foi analisada.

[...]formas de elaboração, transmissão e adaptação de antigos conhecimentos sobre a natureza, as técnicas e a sociedade, considerando as três esferas de análise que conferem identidade a essa área. Desse modo, trata de épocas e culturas do passado e dos antigos conhecimentos elaborados, transmitidos e adaptados em diferentes épocas e cultura.

A questão de pesquisa que norteou esta pesquisa foi: Como os padrões geométricos presentes nos desenhos da tecelagem Maia podem ser utilizados na educação matemática para fortalecer a conexão entre história e matemática e melhorar a aprendizagem dos alunos? Esta questão é relevante e exige o estabelecimento de novos métodos de ensino que permitam aos alunos compreender a matemática respeitando o contexto cultural, ao mesmo tempo que reconhecem e respeitam as contribuições das civilizações passadas para o conhecimento matemático.

A importância desta pesquisa está na sua capacidade de proporcionar aos alunos, ao combinar história e matemática, uma experiência de aprendizagem interessante e significativa. Ao analisar a geometria maia, os alunos não apenas exploram as figuras, mas também adquirem uma compreensão mais profunda do significado histórico e cultural destas obras. Este artigo visa contribuir para uma educação matemática que valorize diferentes disciplinas e reconheça a matemática como uma construção social, cultural e histórica.

(...) colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, de estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva (BRASIL, 2008, p.70).

Os maias foram uma das civilizações mais famosas da Mesoamérica, criando uma cultura rica e diversificada que se destacou em áreas como astronomia, arquitetura e artes. A tecelagem, em particular, desempenha um papel importante na vida quotidiana e é uma expressão da cultura maia. Os maias utilizavam fibras naturais como o algodão e o agave para produzir belos tecidos que, além de atenderem a necessidades funcionais, eram simbólicos e culturais. Os maias tinham técnicas de tecelagem complexas, criando padrões e desenhos geométricos intrincados que refletiam sua visão de mundo. Esses tecidos, muitas vezes tingidos com cores vivas com plantas e minerais locais, eram usados para fazer roupas, cobertores e tapetes, bem como meio de transporte e energia. A tecelagem maia não é, portanto, um artesanato, mas uma expressão social, religiosa e arquitetônica complexa do povo Maia. Cada forma e configuração geométrica representa uma conexão profunda com o universo, o tempo e os deuses.

Este estudo mostra o trabalho que faz a relação entre a Unidade Básica de problematização (UBP) e a história da tecelagem Maia, utilizando o processo de tecelagem como base para analisar conceitos geométricos e matemáticos. Ao examinar os padrões e padrões nos têxteis maias, a UBP sugere que os alunos explorem a matemática por trás desses padrões, como simetria, repetição e riqueza, e sua relação com o mundo maia. O registro histórico da tecelagem maia, que terá como foco a tecnologia e os exemplos deste trabalho, será a base de questões para orientar os alunos na criação de conhecimento matemático. Ao examinar os padrões geométricos encontrados nos têxteis, os alunos terão a oportunidade não só de aprender sobre geometria, mas também de compreender como os números foram integrados nos aspectos culturais, sociais e religiosos da cultura maia. Esta abordagem é diferente e está relacionada com a forma como pretendemos explicar a educação matemática, sendo melhor incluir a história e a cultura da tecelagem maia. Incentiva a reflexão sobre o papel da matemática no desenvolvimento humano e na transmissão de conhecimentos em diferentes épocas e culturas.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Esta pesquisa se baseou nos estudos de Mendes e Miguel (2010), que examinaram a conexão entre a educação matemática, conceitos históricos e culturais, e as técnicas de ensino utilizadas no processo de ensino. Mendes e Miguel (2010) enfatizam que a matemática não deve ser percebida como um campo de estudo isolado e abstrato, mas como uma construção cultural que espelha o saber, os princípios e as práticas de diversas sociedades ao longo da história. Portanto, o estudo da história da matemática atua como uma ligação essencial entre o aprendizado de conceitos matemáticos e a compreensão do contexto no qual esses conceitos foram gerados. Mendes defende que a inclusão da história da matemática nos métodos de ensino expande a perspectiva dos estudantes, fazendo-os entender a matemática como um saber que transforma e satisfaz as demandas humanas. De acordo com ele, essa metodologia promove nos estudantes uma perspectiva crítica e contextual da matemática, incentivando a reflexão, a análise e o entendimento de sua utilização no cotidiano, além de enfatizar a relevância da matemática como componente essencial da cultura humana.

Por outro lado, Miguel se concentra na aplicação de estratégias de ensino efetivas, como as Unidades de Questões Básicas (UBP), um método pedagógico que incentiva a aplicação prática e colaborativa do conhecimento histórico no contexto escolar. Para ele, a UBP possibilita que os estudantes examinem questões matemáticas em contextos históricos autênticos, promovendo a participação ativa e a interação com o material didático. Os escritores defendem que os problemas são a força motriz da UBP, possibilitando aos estudantes aprofundar seu entendimento através da investigação e solução de problemas matemáticos situados em contextos históricos e culturais particulares.

Este procedimento não apenas aprimora o entendimento do conteúdo matemático, mas também aprimora competências cruciais na solução de problemas. Segundo Mendes e Miguel (2010), a UBP é caracterizada como "um flash discursivo de uma prática social", que se origina em um contexto particular de atividade humana, sendo executada para atender a uma necessidade ou anseio emergente na comunidade. Esta pesquisa empregou essa fundamentação teórica para examinar a utilização da UBP na interpretação das contribuições matemáticas da cultura Maia, particularmente nos padrões geométricos na tecelagem, que combinava saberes matemáticos e culturais.

Figura 1: Tecelagem Maia



Fonte: Global voices

Este artigo, fundamentado nos conceitos de Mendes e Miguel (2010), sugeriu estratégias de ensino que incentivam uma aprendizagem ativa e contextual, levando em conta as origens culturais dos estudantes e seus modos de conhecimento. Além disso, buscou desenvolver um entendimento matemático pertinente e integrado à cultura.

3 METODOLOGIA

O método utilizado para criar a base do problema (UBP) neste estudo visou combinar o conhecimento histórico e cultural dos Maias com princípios matemáticos, sendo a tecelagem um elemento chave no apoio à aprendizagem diversificada. Esta abordagem combina os princípios da educação matemática integrada com uma abordagem construtivista, enfatizando a construção do conhecimento dos alunos. O objetivo é proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem relevantes que os ajudem a conectar a matemática a atividades culturais e sociais, como a tecelagem, e a compreender como elas são utilizadas na vida cotidiana.

A fase inicial da metodologia consistiu em escolher conteúdos históricos e matemáticos pertinentes e relacionados ao tema da tecelagem Maia. Esta por sua vez, com suas formas geométricas e conexão com a estrutura social e cultural Maia, é o alicerce para a investigação de conceitos matemáticos, tais como simetria, proporção e padrões repetitivos. A seleção desses materiais obedeceu ao princípio da relevância cultural e pedagógica, conforme proposto por Freire (2018). Ele enfatiza a relevância de um currículo que esteja em sintonia com as vivências e realidades dos estudantes, promovendo um aprendizado relevante e o envolvimento com os tópicos discutidos. Além disso, é importante contextualizar conceitos matemáticos como geometria e álgebra para que os alunos compreendam o seu uso e aplicação em contextos práticos do mundo real.

A estrutura de conteúdo da UBP foi projetada para que os alunos possam estudar e integrar os conceitos da tecelagem maia e da matemática. A análise de padrões matemáticos em camadas e a sua relação com o equilíbrio e a precisão serão exploradas através de atividades que incluem a análise de padrões na arte maia e a resolução de problemas matemáticos com base nesta análise. As atividades sugeridas incluem a resolução de problemas relacionados à matemática e à álgebra na costura, como definir áreas e situações relacionadas à repetição de padrões ou usar álgebra para avaliar modelos matemáticos. Essas atividades foram projetadas para desenvolver habilidades acadêmicas, como pensamento lógico e resolução de problemas, ao mesmo tempo que ajudam os alunos a compreender como a matemática pode ser usada de forma eficaz em diferentes culturas. Ao fazer isso, a UBP oferece atividades destinadas a envolver os alunos diretamente com a história e a cultura da civilização maia e incentivá-los a analisar, avaliar e aplicar conceitos matemáticos.

Portanto, a abordagem adotada visou não só a criação de conhecimento matemático, mas também a valorização da cultura maia, tendo em conta a sua contribuição para o desenvolvimento da matemática e de outras áreas do conhecimento. As atividades sugeridas para resolução de problemas incluem questões relacionadas ao tecido maia, como cálculos de área e proporção, e atividades matemáticas que incentivam os alunos a explorar as relações entre a geometria e a cultura maia. Abaixo estão alguns exemplos de questões que os alunos serão solicitados a analisar e resolver.

1. Calcule a área de um padrão quadrado da tecelagem Maia, sabendo que cada lado mede 65 cm.
2. Se a base de um padrão geométrico fosse aumentada em 10%, qual seria a nova medida da base?
3. Cada padrão geométrico da tecelagem Maia possui lados iguais de 65 cm e altura de 24 cm. Calcule a área de um triângulo formado no padrão.
4. Determine o perímetro de um padrão geométrico da tecelagem.
5. Sabendo que um padrão de tecelagem Maia possui 4 repetições, e cada repetição contém 91 linhas, quantas linhas existem em toda a peça, se o padrão tiver uma única linha inicial?
6. Se um tecelão faz 10 repetições a cada hora, quantas horas ele levaria para completar 91 linhas do padrão?

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve como objetivo explorar a conexão entre história, cultura e matemática por meio de problemas de grupo (UBP), utilizando a tecelagem maia como conceito matemático. A pesquisa tentou mostrar a importância de combinar o ensino da matemática com fatores históricos e culturais, promovendo uma abordagem diversificada que ensine conceitos e desperte os alunos para melhor compreenderem como a matemática é utilizada no contexto cultural de diferentes civilizações. A tecelagem maia, com as suas formas geométricas e simbólicas, é escolhida como ponto de partida para a resolução de problemas, estimulando a imaginação e o raciocínio matemático, permitindo aos alunos explorar princípios como proporção, simetria e repetição de padrões. A análise dos trabalhos propostos mostrou que a utilização de métodos de ensino como a UBP pode enriquecer o ensino da matemática, tornando-o significativo e relevante para a realidade social dos alunos.

Além disso, ao combinar história e matemática, o método utilizado demonstrou estimular o pensamento crítico e a resolução de problemas, reforçando a ideia de que o estudo dos conceitos matemáticos não deve ser separado de sua história e cultura. Esta combinação não só desenvolve o pensamento e as competências matemáticas, mas também desenvolve ideias importantes sobre a matemática como uma parte importante das práticas sociais e culturais.

REFERÊNCIAS

- AMARANTE, Rebeca Oliveira. *Os conhecimentos geométricos mobilizados no uso do astrolábio náutico do português Simão D'Oliveira (1606) na formação do licenciando em matemática*. 2023. 206 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2023.
- FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. *Interdisciplinaridade: história, teoria e pesquisa*. Campinas: Papirus, 1994.
- FREIRE, Paulo. *Pedagogia da esperança: um reencontro com a pedagogia do oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2014.
- LIMA, R. A.; SOUZA, M. P. O ensino de matemática através de situações-problema contextualizadas. *Revista Brasileira de Educação Matemática*, v. 22, n. 3, p. 45–58, 2019.
- MAIAS, Olmecas e Povos Mesoamericanos. p. 29–39. [Dados editoriais incompletos. Sugerido: incluir autor, ano, local e tipo de publicação].
- MENDES, I. A.; FARIAS, C. A. *Práticas socioculturais e educação matemática*. [S.l.: s.n.], [s.d.]. [Recomenda-se informar a editora e o ano].
- OREY, Daniel Clark; ROSA, Milton. Um estudo etnomatemático das esteiras (pop) sagradas dos Maias. 2004. [Especificar tipo de documento, evento ou publicação, local e editora, se aplicável].
- TAVARES, Marina Oliveira; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Um cenário científico acerca da UBP como proposta didática na inserção da história da matemática no ensino. *Revista de História da Educação Matemática*, v. 10, p. 1–19, 2024.

POLÍGONOS DE REULEAUX: GENERALIZAÇÃO DE π E APLICAÇÕES
 Crossref  10.56238/livrosindi202535-023
Vanessa Martins SáE-mail: vanessa.sa@cameta.ufpa.br**Rubensvaldo Monteiro Pereira**E-mail: rubenp@ufpa.br**RESUMO**

Este trabalho explora as propriedades dos polígonos, com ênfase nas formas que possuem diâmetro constante. O objetivo principal é analisar sua relação com a generalização do número π . Embora o círculo seja uma figura de largura constante, ele não é único. Existem diversas outras formas geométricas que também possuem essa propriedade. Um exemplo notável é o triângulo de Reuleaux. A análise dessas figuras também nos conduz à exploração de generalizações do número π , revelando como diferentes formas geométricas podem ter suas próprias relações entre perímetro e largura, mesmo que não sejam círculos. Além de sua relevância teórica, os polígonos de Reuleaux têm aplicações práticas em engenharia e design, demonstrando uma relação entre a matemática e a vida cotidiana.

Palavras-chave: Triângulo de Reuleaux, Generalização do π , Geometria.

1 INTRODUÇÃO

Você sabia que nem todas as rodas são no formato circular? Ao contrário do que muitos pensam, existem sim, diversas outras figuras geométricas que serviriam de base para uma roda ao invés do círculo. Essas formas são chamadas de polígonos de Reuleaux, que:

“[...] são curvas planas simples fechada e convexas de largura constante, construídas a partir de um número finito de arcos circulares com o mesmo comprimento de raio, centralizados sempre no vértice oposto aos lados de um polígono convexo.” (RODRIGUES, 2015, p. 17).

Esse nome foi dado em homenagem ao engenheiro Franz Reuleaux que, no século XIX, desenvolveu mecanismos envolvendo esse tipo de forma geométrica de diâmetro constante.

Esses polígonos, possuem uma propriedade notável: mantêm uma largura constante semelhante à de um círculo, ou seja, independentemente de sua orientação, a distância entre dois planos paralelos tangentes à figura permanece equivalente. Essa característica única os torna adequados para diversas aplicações práticas. Por exemplo, o triângulo de Reuleaux que mesmo não sendo circular, mantém o diâmetro constante, pode perfeitamente desempenhar funções que exigem estabilidade geométrica, como nos casos das rodas.

Essa peculiaridade da geometria tem aplicações práticas. Por exemplo, nos casos das rodas de um carro, a distância desses eixos em relação ao solo que corresponde ao raio da roda, deve ser a mesma para assim garantir um movimento suave. Da mesma maneira, a geometria dos polígonos de larguras constantes permite o movimento contínuo, sendo uma solução eficiente para o transporte de objetos pesados, método este, muito utilizado antigamente pelos egípcios durante a construção das pirâmides tornando possível que grandes blocos fossem transportados sem precisar de muitos esforços.

Neste estudo, faremos uma breve abordagem sobre as propriedades matemáticas do triângulo de Reuleaux e a generalização do número π , além de examinar suas aplicações práticas no design e na engenharia.

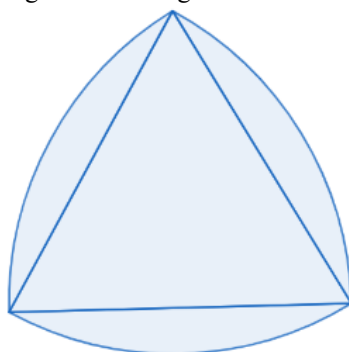
2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 TRIÂNGULO DE REULEAUX

Dentre as formas geométricas, o triângulo de Reuleaux é uma das mais interessantes de se analisar, haja visto algumas de suas propriedades especiais. Mas o que seria um triângulo de Reuleaux?

De acordo com Mello (2013), o triângulo de Reuleaux é uma forma geométrica plana não circular com diâmetro constante, composta por três arcos de círculos com o mesmo raio, centralizados nos vértices de um triângulo equilátero. Como ilustra a figura 1.

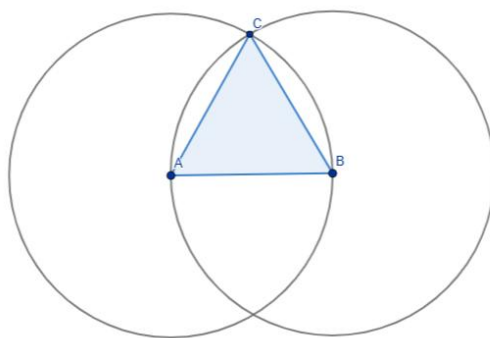
Figura 1 – Triângulo de Reuleaux



Fonte: Os autores.

Observemos como se dá a construção dessa figura passo a passo. Partindo de dois pontos **A** e **B**, construímos uma circunferência com centro em **A** e que passe pelo ponto **B**. Logo a seguir, construímos uma circunferência com ponto base em **B** e que passe pelo ponto **A**. Surge então uma área de intersecção. Marque um ponto **C** onde as linhas se cruzam, seja embaixo ou em cima. Agora liguem os três pontos **A**, **B** e **C**. Surge então um triângulo equilátero. Como mostra a figura 2.

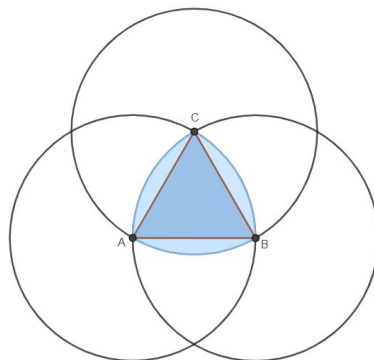
Figura 2 – Triângulo Equilátero entre as Circunferências



Fonte: Os autores.

Por que consideramos a figura criada pelos três pontos ligados como um triângulo equilátero? Porque os comprimentos de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ são iguais. Mas como é possível construir um triângulo de Reuleaux a partir dessa figura? É simples. Tomemos como centro o ponto C e tracemos uma circunferência que passe pelos pontos A e B . Surge, portanto, a figura do Triângulo de Reuleaux. Embora tenha o nome de triângulo, é possível notar que, na realidade, não é um triângulo e sim uma curva formada a partir de um triângulo equilátero. Como nos mostra em mais destaque na figura 3, o triângulo entre as circunferências.

Figura 3 – Formação Triângulo de Reuleaux através das Circunferências



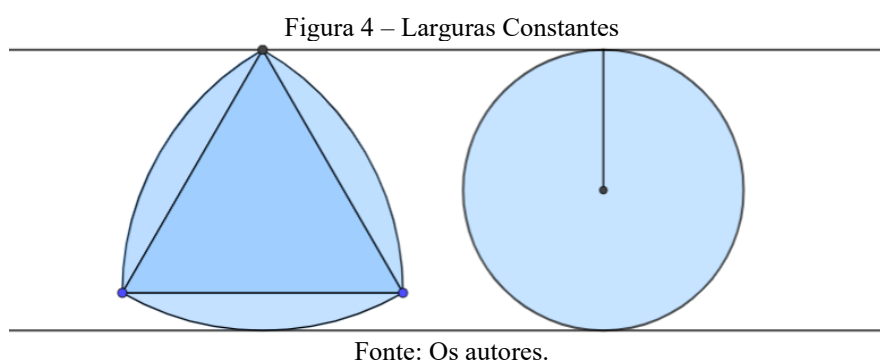
Fonte: Os autores

Apesar dessa construção geométrica, o triângulo de Reuleaux, não é um triângulo no sentido tradicional, mantém propriedades interessantes, como a capacidade de girar suavemente em um espaço que limita sua largura constante.

2.2 LARGURA CONSTANTE

A largura constante é uma propriedade geométrica de formas que mantém a distância entre dois planos paralelos tangentes, se mantém a mesma em qualquer direção que se tomem as retas paralelas. No caso do triângulo de Reuleaux, a distância entre os planos tangentes

permanece a mesma, não importando sua posição. Observemos as figuras abaixo para melhor exemplificar:

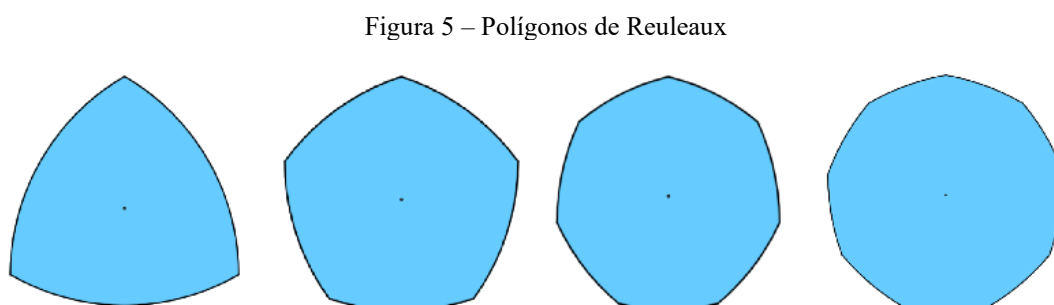


Fonte: Os autores.

O círculo é o exemplo de figura mais simples e conhecido com largura constante. No caso do triângulo de Reuleaux, essa característica o torna adequado para aplicações que exigem eficiência similar à de uma roda circular, como sistemas de transporte e mecanismos de engenharia. Além do Triângulo de Reuleaux, como já vimos, existem outras figuras planas com essa mesma propriedade. Essas curvas planas fechadas e convexas formadas a partir de polígonos regulares com um número ímpar de lados são chamados de polígonos de Reuleaux, pois todas possuem larguras constantes. Não se pode dizer o mesmo das figuras com números par de lados, pois:

“Só existe vértice oposto a lados de polígonos cujo número de lados é ímpar, portanto, os polígonos convexas com um número par de lados não possuem lado oposto a um vértice, sendo assim impossível a construção de um Hexágono de Reuleaux, um Octógono de Reuleaux tão pouco um Quadrado de Reuleaux.” (RODRIGUES, 2015, p. 18).

Veja o exemplo abaixo de Polígonos de Reuleaux todos com o número ímpares de lados.



Fonte: Os autores.

Ao traçar um segmento de direção reta de um vértice para o outro lado, esse segmento não encontrará o outro vértice, pois seu número de lados é ímpar. Já nos polígonos com número par de lados, ao repetir a mesma ação o segmento irá encontrar o outro vértice não podendo ser considerado um Polígono de Reuleaux.

Se imaginarmos um carro com rodas no formato desses polígonos, podemos afirmar que ele irá se movimentar tal qual o faz um com roda em formato circular isso porque ao rolar essas rodas, a distância entre o ponto do centro da roda e o chão será sempre a mesma, ou seja não, será alterada mantendo o espaço entre as retas com uma largura constante do início ao fim.

2.3 GENERALIZAÇÃO DE PI (π)

Segundo Mello (2013), nos círculos a razão entre o perímetro (c) e o diâmetro (d) é denotada por π . Assim:

$$\frac{c}{d} = \pi$$

Essa relação é sempre a mesma para um círculo independentemente do seu tamanho. Contudo, surge a pergunta: para outras curvas de largura constante, como os polígonos de Reuleaux, existe uma nova abordagem para entender essas propriedades? Para entender melhor essa relação, tomemos a razão expressa como:

$$\frac{2p}{w},$$

onde $2p$ representa o perímetro e w a largura constante da figura. Essa relação permite observar a generalização do número π para formas não circulares.

Para o triângulo de Reuleaux, o perímetro p pode ser expresso como:

$$2p = \pi a,$$

onde a é o lado do triângulo. A largura constante w é dada por:

$$w = a.$$

Substituindo $2p$ e w na relação entre o perímetro e a largura, temos:

$$\frac{2p}{w} = \frac{\pi a}{a} = \pi.$$

A razão entre o perímetro e o diâmetro abre espaço para uma generalização do número π , revelando assim como diferentes formas geométricas podem ter suas próprias relações entre perímetro e largura, mesmo que não sejam de formato circular.

2.4 ÁREA EM CURVAS DE LARGURA CONSTANTE

Nos estudos das curvas de largura constantes, a questão da área ocupada por essas formas é crucial para a compreensão das propriedades e aplicações geométricas dessas figuras. Entre as figuras de largura constante, o círculo possui a maior área possível, enquanto o triângulo de Reuleaux apresenta a menor. Nesse sentido:

“O Teorema de Blaschke-Lebesgue afirma que o triângulo de Reuleaux tem a menor área interna entre todas as curvas de determinada largura constante. Pela desigualdade isoperimétrica, a curva de largura constante com maior área é o círculo.” (RODRIGUES, 2015, p. 25).

Esse teorema é essencial para compreender as características das formas geométricas e suas conexões com a largura. Isso demonstra que, embora o triângulo de Reuleaux mantenha a largura constante, algumas de suas propriedades geométricas diferem das do círculo, especialmente em termos de área.

3 METODOLOGIA

A metodologia deste artigo incluiu a análise práticas dos conceitos com as propriedades dos polígonos de Reuleaux. O objetivo é exibir com aplicações reais as características de largura constante. O resultado da pesquisa consiste na demonstração prática de como se mantém a constância da largura dos sólidos na forma de polígono de Reuleaux quando utilizados para transportar objetos.

Na montagem para demonstração prática, foram utilizados triângulos de Reuleaux, para verificar a estabilidade proporcionada pelas curvas de larguras constante. A seguir, especifica-se as etapas e as ferramentas inclusas na demonstração.

3.1 APLICAÇÕES PRÁTICAS DOS POLÍGONOS DE REULEAUX APLICADAS AO ENSINO DE GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Os polígonos de Reuleaux não são apenas figuras teóricas, eles têm muitas aplicações práticas no mundo real, principalmente na engenharia e design. Esses conceitos devem ser trabalhados desde o ensino fundamental para que os alunos vejam na prática como se constrói um polígono de Reuleaux, suas propriedades e aplicações. A importância dessas aplicações práticas nas aulas de matemática já vem sendo discutida.

“A nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC), desde seu processo de elaboração, trouxe a discussão sobre a importância de se repensar o currículo de Matemática, não só da referida área, mas das outras também. Essa ação trouxe a necessidade de remodelar muita das outras ferramentas que compõe o processo de Ensino. Tendo como um dos objetivos de construção desse novo currículo aproximar o que está sendo ensinado à realidade do aluno. Dentro dessa perspectiva, se percebe a necessidade do ensino da Matemática que favoreça, não só a construção do pensamento Matemático, como sua aplicação, para isso, se faz necessário o uso das tecnologias digitais e de um processo de ensino que favoreça o protagonismo do aluno.” (LINO, 2020, p. 12).

Aplicar na prática os conhecimentos teóricos torna as aulas mais significativas para os alunos e esse é um dos grandes desafios do educador matemático, fazer com que o aluno protagonize a aprendizagem vendo a matemática não só como uma disciplina, mas algo possível de se vivenciado na prática do seu dia a dia e a utilize nas diversas situações do dia a dia que exijam resolução. No caso, da temática em questão como um polígono de Reuleaux pode substituir uma roda quando necessário para deslocamento de algum objeto. Participar da construção do conhecimento torna-se algo atrativo.

3.1.1 Demonstração Prática com Triângulos de Reuleaux

Uma das possibilidades de se aplicar na prática em sala de aula é a utilização de triângulos de Reuleaux para substituir as rodas no transporte de objetos provando que eles mantem a constância bloco entre o solo e o bloco transportado.

Podemos utilizar esta atividade prática com o nono ano do ensino fundamental para trabalhar a habilidade (EF09MA15), onde trabalhamos o estudo dos Polígonos Regulares.

Uma demonstração prática a ser feita em sala de aula consiste no seguinte: Reúna os seguintes materiais:

- **Quatro triângulos de Reuleaux:** feitos de mdf, papelão ou plástico, com a mesma largura e espessura.
- **Base para suporte:** uma tábua de madeira ou plástico que sirva como suporte para o copo de água.
- **Eixo central:** pode ser de madeira ou metal, mas que permita o movimento dos triângulos.
- **Copo de água:** é ideal, pois permite observar o movimento e a estabilidade durante a rotação.

Montagem:

- Coloque dois triângulos de Reuleaux em cada lado do eixo central, formando um conjunto simétrico.
- Fixe a tábua por cima dos triângulos, criando uma superfície plana.
- Coloque um copo de água sobre a tábua.

Figura 6: Exemplo da Demonstração Prática



Fonte: Os autores.

3.1.2 Observações e Resultados

Ao girar de maneira suave o eixo central, os triângulos de Reuleaux começam a rodar, demonstrando a propriedade de largura constante. Essa configuração permite que a tábua (e o copo de água) mantenham um movimento estável e contínuo.

Resultados:

- O copo de água pode se manter em equilíbrio, ilustrando a eficiência e a estabilidade que a geometria de largura constante proporciona.
- Essa demonstração prática ajuda a reforçar a compreensão das propriedades matemáticas envolvidas e sua aplicação em contextos reais.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Baseado nos estudos obtidos por este trabalho, conclui-se que os polígonos de Reuleaux representam uma fascinante intersecção entre geometria clássica e aplicações práticas. A análise de suas propriedades métricas como área e perímetro, aprofunda o entendimento sobre a generalização de constantes geométricas em especial o π , para formas não circulares. A relação entre os polígonos de Reuleaux e o círculo revela que formas aparentemente simples podem ter complexidades matemáticas surpreendentes.

Este estudo também aponta a relevância dos polígonos de Reuleaux na aproximação de constantes e na representação de formas com características não convencionais. A investigação dessas figuras amplia o escopo da geometria clássica e oferece um campo promissor para futuras pesquisas, especialmente na modelagem e aplicação prática em engenharia, design e otimização.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

LINO, Samuel Robson de Almeida. *Polígonos de Reuleaux e sólidos de largura constante: conceitos e aplicações*. 2020. 64 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual do Ceará, Quixadá, 2020.

MELLO, José Luiz Pastore. Polígonos de Reuleaux e a generalização de Pi. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 81, 2013.

RODRIGUES, André Soares. *Polígonos de Reuleaux*. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=115. Acesso em: 02 fev. 2020.

A UTILIZAÇÃO DO JOGO TWISTER COMO FERRAMENTA LÚDICA PARA O ENSINO DE DIVISIBILIDADE: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA

  10.56238/livrosindi202535-024

Andreza Pastana Lopes

E-mail: andreza.lopes@cameta.ufpa.br

Samuel Drago Araújo da Silva

E-mail: samuel.araujo.silva@cameta.ufpa.br

RESUMO

Este trabalho relata a experiência do Estágio Supervisionado II, realizado na Escola Municipal Raimundo Arcanjo da Costa, em Oeiras do Pará, com foco na aplicação de uma abordagem lúdica para o ensino de divisibilidade em matemática. O objetivo do trabalho foi superar as dificuldades dos alunos no entendimento dos critérios de divisibilidade, utilizando o jogo *Twister* como ferramenta pedagógica. Participaram da atividade quatro turmas do 9º ano, totalizando aproximadamente 120 alunos. Durante 80 horas de observação e atuação, foi identificado que os estudantes apresentavam dificuldades significativas com a divisão e os critérios de divisibilidade. Para abordar esse desafio, o jogo foi adaptado, associando os movimentos do jogo às respostas corretas sobre divisibilidade. A aplicação do jogo foi precedida por aulas expositivas e seguiu uma metodologia interativa, com a intenção de tornar o aprendizado mais dinâmico e acessível. O conteúdo foi trabalhado de forma gradual, e a compreensão dos alunos foi acompanhada por meio de sua participação nas atividades lúdicas. Embora houvesse variação no desempenho, observou-se um aumento no envolvimento e interesse dos alunos, evidenciando a eficácia da abordagem lúdica na aprendizagem. A experiência proporcionou ao estagiário uma vivência prática importante, permitindo reflexões sobre o planejamento pedagógico, a adaptação de estratégias didáticas e a importância da ludicidade no processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Aprendizagem Ativa, Ensino de divisibilidade, Estratégias didáticas.

1 INTRODUÇÃO

A proposta do Twister Matemático surge como uma adaptação criativa do tradicional jogo de Twister, visando transformar o aprendizado de conceitos matemáticos em uma experiência interativa e dinâmica. Essa adaptação mantém a dinâmica original, onde os participantes devem movimentar mãos e pés conforme as instruções, mas agora associando essa movimentação a questões matemáticas, como as operações de divisão e critérios de divisibilidade. Nesse jogo, dois dados são usados: um determina qual membro do corpo será posicionado (mão ou pé) e o outro indica a direção (esquerda ou direita). O jogo busca não apenas ensinar conceitos matemáticos, mas também incentivar o desenvolvimento de habilidades motoras, como a lateralidade, por meio de um aprendizado que combina movimentos físicos com a resolução de problemas matemáticos. Ao proporcionar essa integração, tal atividade oferece uma abordagem lúdica que estimula a participação ativa dos alunos e aumenta o interesse pelo conteúdo, transformando o aprendizado em uma experiência mais prazerosa e envolvente.

Esse tipo de abordagem lúdica se alinha com as ideias propostas por De Murzi (2004), que enfatiza a importância de direcionar as ações educativas nos primeiros anos de vida para estimular o desenvolvimento cognitivo, emocional, motor, social, e até moral das crianças. Segundo ele, é crucial que esse período seja aproveitado para desenvolver as potencialidades das crianças, especialmente para promover sua inteligência. A proposta deste jogo vai ao encontro dessa necessidade, pois além de trabalhar conceitos matemáticos, também estimula o desenvolvimento físico e motor, reforçando o aprendizado por meio de atividades interativas e desafiadoras. Assim, o Twister Matemático propõe uma forma mais equilibrada e eficaz de ensinar, unindo o desenvolvimento cognitivo e motor de forma lúdica e significativa.

1.1 O AMBIENTE ESCOLAR

A Escola Municipal de Ensino Fundamental Raimundo Arcanjo da Costa, fundada em 1961, está localizada no Bairro do Marapira, em Oeiras do Pará. Ela oferece o Ensino Fundamental para os anos finais e a Educação de Jovens e Adultos (EJA), atendendo a uma grande demanda local e de áreas rurais. A escola possui uma estrutura física de 1.900 m², com 21 salas de aula, refeitório, cantina, biblioteca e quadra esportiva, todas bem conservadas e adaptadas ao conforto dos alunos. Seu corpo docente é composto por profissionais qualificados, com muitos deles sendo pós-graduados e outros com mestrado concluído ou cursando doutorado, e a instituição segue as diretrizes da Resolução CEE nº 274 de 2011. Localizada em área de fácil acesso, com infraestrutura adequada, a escola é a principal opção de educação básica para a população local, atendendo tanto alunos de classe média quanto de baixa renda, e prioriza métodos pedagógicos que estimulam o interesse dos alunos no aprendizado.

2 METODOLOGIA

A metodologia do projeto foi estruturada com o objetivo de abordar as dificuldades dos alunos em relação à divisão e aos critérios de divisibilidade. A implementação do projeto iniciou-se com uma fase de observação durante o estágio Supervisionado II, onde a equipe identificou que as turmas apresentavam dificuldades significativas no conceito de divisão quando estavam estudando radiação, e precisavam realizar a fatoração para encontrar as raízes. Com base nesse diagnóstico, foi decidido revisar a operação Divisão, apresentar os critérios de divisibilidade e adaptar o jogo Twister para reforçar os critérios de divisibilidade de uma forma lúdica, utilizando-o como ferramenta didática para sair um pouco da rotina de aula. A primeira etapa da implementação consistiu na realização das aulas supervisionadas, nas quais foram ensinados e

discutidos os critérios de divisibilidade do 1 ao 7. Na semana seguinte, o jogo foi introduzido como recurso para reforçar os conceitos de divisibilidade de forma lúdica. A equipe dividiu a turma em duas equipes e explicou como aconteceria o jogo e suas regras, adaptando-o para o contexto de aprendizagem.

O projeto foi aplicado inicialmente à turma do 9º A, composta por 33 alunos. As regras do jogo foram explicadas aos alunos, seguidas por uma demonstração prática realizada com dois estudantes, a fim de ilustrar como a atividade seria conduzida. Em seguida, a competição foi iniciada, com três perguntas sendo feitas aos alunos. A cada resposta correta, a roleta era girada e escolhia uma parte do corpo (mão esquerda, mão direita, pé esquerdo ou pé direito) para posicionar a resposta correta no tabuleiro. O objetivo era que o aluno acertasse o máximo de perguntas possível, avançando no jogo. Caso errasse, ele perdia a rodada.

Após a aplicação do jogo na turma do 9º A, a equipe seguiu para as turmas do 9º B, 9º J e 9º I, onde o processo foi repetido. Em cada turma, as regras foram explicadas novamente, seguidas de uma demonstração prática. O jogo foi então executado, com os alunos participando de forma semelhante ao que ocorreu na turma do 9º A. O projeto foi estruturado para envolver todos os alunos e garantir que todos tivessem a oportunidade de responder às questões, o que contribuiu para o engajamento nas atividades propostas. A metodologia foi aplicada de forma sistemática, com o objetivo de reforçar o aprendizado dos critérios de divisibilidade de maneira interativa e divertida.

3 RESULTADOS

O projeto Twister Matemático segue princípios embasados na ideia de que a ludicidade e a interação física são elementos essenciais para o aprendizado eficaz, como observado em diversas abordagens educacionais. Em contextos semelhantes, como os descritos em outros estudos sobre atividades lúdicas, o uso de jogos como o Twister tem sido destacado como uma ferramenta valiosa para engajar os alunos, permitindo-lhes interagir com o conteúdo de forma dinâmica. Esses jogos não apenas promovem a participação ativa dos alunos, mas também estimulam a cooperação e o desenvolvimento de habilidades cognitivas e motoras, alinhadas aos objetivos de aprendizagem.

Em muitos casos, como no exemplo de pesquisa descrito, a abordagem lúdica permite aos alunos vivenciar situações problemáticas de maneira mais natural e intuitiva, gerando um conhecimento prévio por meio da espontaneidade do jogo. Da mesma forma, neste projeto, os alunos foram incentivados a responder perguntas matemáticas relacionadas aos critérios de divisibilidade enquanto interagiam fisicamente com o tabuleiro, o que facilitou o engajamento

deles com o conteúdo. O uso do corpo no jogo ajudou a fixar os conceitos, além de gerar um ambiente colaborativo onde os alunos compartilhavam conhecimentos e aprendiam uns com os outros.

Figura 1: Momento de orientação sobre o funcionamento do jogo.



Fonte: Autores.

Além disso, a aplicação de atividades lúdicas, como as mencionadas nos estudos, favorece o desenvolvimento de noções lógico-matemáticas e aprimora os processos básicos de pensamento. Dienes (1977) atribui uma certa hierarquia ao jogo como fator fundamental na compreensão do tema, além da grande importância que dá ao jogo livre como introdutor no desenvolvimento do mesmo, inserindo ao mesmo tempo atividades de construção (onde se evidencia o Twister como estratégia), representação gráfica e atividades de confronto, tornando tal atividade uma tarefa proveitosa com uma ordem lógica e coerente, respondendo às temáticas tratadas. Durante o jogo os alunos foram desafiados não apenas a compreender os conceitos de divisibilidade, mas também a aplicar esses conceitos de maneira prática e colaborativa, o que fortaleceu o aprendizado e a fixação do conteúdo. As observações diárias permitiram identificar dificuldades, mas também possibilitaram a criação de soluções imediatas, adaptando a metodologia conforme as necessidades da turma. Ao refletir sobre o impacto do jogo, o projeto se alinhou com as conclusões de outras pesquisas que demonstram como a integração de atividades lúdicas ao ensino pode gerar avanços significativos no aprendizado. Os resultados indicaram que o uso de jogos não só facilita a compreensão dos temas tratados, mas também motiva os alunos a participar ativamente das atividades, promovendo uma aprendizagem mais eficaz e prazerosa.

Figura 2: Alunos jogando Twister matemático.



Fonte: Autores.

Figura 3: Alunas jogando Twister matemático.



Fonte: Autores.

4 CONCLUSÃO

A experiência descrita neste estudo demonstrou que a aplicação do jogo Twister, adaptado para o ensino de divisibilidade, foi uma abordagem eficaz para promover a aprendizagem ativa entre os alunos do 9º ano da Escola Municipal Raimundo Arcanjo da Costa. A metodologia lúdica, que combinou atividades físicas com conceitos matemáticos, estimulou o envolvimento dos estudantes, tornando o aprendizado mais dinâmico e acessível. A adaptação do Twister permitiu que os alunos interagissem com os conceitos de divisibilidade de forma prática e colaborativa, além de integrar o desenvolvimento motor com a resolução de problemas matemáticos. Esse tipo de abordagem, ao desafiar os alunos a aplicarem os conceitos em situações concretas e por meio de movimento físico, contribuiu significativamente para a fixação do conteúdo e para a melhoria da compreensão dos critérios de divisibilidade.

Os resultados do projeto indicam que o uso de recursos lúdicos pode não apenas facilitar a compreensão de conceitos abstratos, mas também aumentar a motivação dos alunos e melhorar a participação nas atividades. Além disso, a metodologia de ensino adaptativa, que levou em conta as dificuldades observadas e ofereceu soluções imediatas, foi essencial para o sucesso do projeto, permitindo que todos os alunos, independentemente de seu nível de conhecimento prévio, se beneficiassem da atividade. É importante destacar que, ao integrar o ensino de conceitos matemáticos com atividades físicas, o projeto proporcionou um ambiente de aprendizagem mais envolvente, que contribuiu para o desenvolvimento cognitivo e motor dos alunos. A experiência também proporcionou uma reflexão sobre a importância de práticas pedagógicas inovadoras, que não apenas ensinam, mas também despertam o desejo de aprender e a resiliência diante das dificuldades.

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, Edwaldo; MIAMI, Marcos. *Construindo conhecimento em matemática*. São Paulo: Moderna, 1998.

DE MURZI, F. E. La educación preescolar: un derecho que tiene la infancia a participar en situaciones educativas que sirvan para impulsar su desarrollo integral. *Acción Pedagógica*, p. 136–140, 2004.

DIENES, Z. P. *Las seis etapas del aprendizaje en matemáticas*. Barcelona: Teide, 1977.

GONZÁLEZ, F.; ROJAS, G. Twister matemático: una manera práctica de enseñar y aprender a partir del juego. *Revista de Docencia e Investigación*, 2013.

A IMPORTÂNCIA DOS PROGRAMAS PRP E PIBID PARA A REALIZAÇÃO DA I FEMAT

  10.56238/livrosindi202535-025

Danyelle Rego Barreto Soares

E-mail: barreto.danyelle@yahoo.com

Milana Sagica Sardinha

E-mail: milasagica@gmail.com

Suellen Cristina Queiroz Arruda

E-mail: scqarruda@ufpa.br

Reinaldo Feio Lima

E-mail: reinaldo.lima@ufpa.br

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar a importância da Feira Municipal de Matemática de Abaetetuba (I FEMAT), realizada em 2023, e a contribuição dos programas de Residência Pedagógica (PRP) e Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) para sua realização. A pesquisa é de caráter qualitativo e utiliza a observação e análise de dados coletados por meio de tabelas que detalham a participação das instituições de ensino e a vinculação dos trabalhos apresentados aos programas. Os resultados mostram que, dos 45 trabalhos expostos, 34 estavam associados ao PRP e PIBID, evidenciando a relevância dessas iniciativas para a promoção da educação matemática. A análise revela que, além da orientação e apresentação dos projetos, a participação ativa dos bolsistas foi crucial para o sucesso do evento.

Palavras-chave: Feira de Matemática, PRP, PIBID, Contribuição.

1 INTRODUÇÃO

A Feira Municipal de Matemática de Abaetetuba (I FEMAT) é um evento que visa promover a intersecção entre Educação Matemática, Matemática Pura e Aplicada de forma dinâmica e interativa, reunindo alunos, professores e a comunidade acadêmica em torno do compartilhamento de conhecimentos e experiências. Realizada em 2023 no Campus Universitário de Abaetetuba, a mesma proporcionou uma exposição de trabalhos e a realizações de minicursos e palestras, abordando temas inerentes ao ensino de matemática. Essa iniciativa busca não apenas incentivar o interesse pela disciplina, mas também fortalecer a troca de saberes entre os participantes.

Os programas de Residência Pedagógica (PRP) e Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) desempenham um papel crucial nesse contexto. O PRP tem como objetivo formar professores por meio de uma vivência prática em escolas, permitindo que os residentes desenvolvam competências pedagógicas e articulem teoria e prática. Já o PIBID visa

fomentar a iniciação à docência, oferecendo bolsas para estudantes de licenciatura que atuam como bolsistas em projetos de ensino, contribuindo para a melhoria da qualidade da educação nas instituições de ensino.

A integração desses programas na realização da FEMAT evidenciou seu impacto positivo, ao permitir que os alunos bolsistas orientassem e participassem da elaboração de trabalhos apresentados na feira. Assim, a colaboração entre as iniciativas educacionais e a realização de eventos como a FEMAT não apenas enriquece a formação dos futuros educadores, mas também promove um ambiente de aprendizado colaborativo, essencial para a valorização da matemática na educação básica.

2 METODOLOGIA

Os bolsistas receberam a tarefa de elaborar projetos e orientar os alunos das escolas campo a participarem como expositores de trabalhos na FEMAT, juntamente com seus professores preceptores. Além disso, os bolsistas também tiveram a oportunidade de submeter trabalhos para exposição no evento.

Para ilustrar com clareza a colaboração e a importância desses programas na realização da feira, foi elaborado o Quadro 01 abaixo.

Quadro 01 - Contribuições dos Programas PRP e PIBID I FEMAT

INSTITUIÇÃO DE ENSINO	NÚMERO DE TRABALHOS	ORIENTADOS POR BOLSISTAS	APRESENTADOS POR BOLSISTAS
Escola Municipal de Ensino Fundamental Bom Pastor	1	0	0
Clube de Ciências de Abaetetuba/Centro de Pesquisa Desenvolvimento da Educação Matemática Científica	1	0	0
Escola Estadual de Ensino Fundamental Esmerina Bou Habbib	5	5	0
Escola Estadual de Ensino Médio Prof.a Benvinda de Araújo Pontes	6	6	0
Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Prof. Bernardino Pereira de Barros	8	8	0
Escola Municipal de Ensino Fundamental Prof. ^a Laura dos Santos Ribeiro	1	0	0
Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Prof. Leonardo Negrão de Sousa	7	6	0
Escola Estadual de Ensino Médio Prof. ^a Terezinha de Jesus Ferreira Lima	1	0	0
Universidade Federal do Pará	15	0	9
TOTAL	45	25	9

Fonte: as autoras

O quadro acima apresenta informações sobre as instituições de ensino que participaram da FEMAT, a quantidade de trabalhos expostos, o número de projetos orientados por bolsistas dos programas PRP e PIBID, além da quantidade de trabalhos apresentados pelos próprios bolsistas.

Os programas como o RP e o PIBID contribui significativamente na/para formação prática dos estudantes de licenciatura. Tais programas são uma resposta a desafios históricos da formação inicial de professores, que muitas vezes carece de experiências práticas que conectem a teoria à realidade da sala de aula (SANTOS, 2017; LIMA; SILVA, 2019). No caso da Feira de Matemática de Abaetetuba, os dados mostram que 34 dos 45 trabalhos apresentados estavam diretamente vinculados aos programas, o que indica que essas iniciativas têm proporcionado aos estudantes e professores oportunidades significativas para aplicar seus conhecimentos e compartilhar suas experiências com a comunidade escolar. Essa participação ativa na elaboração e execução de projetos contribui diretamente para a formação de futuros docentes, conforme apontado por Freitas (2020), que discute como a imersão no cotidiano escolar é essencial para o desenvolvimento de habilidades pedagógicas.

Além disso, o fato de que 25 trabalhos orientados por bolsistas dos programas RP e PIBID reforça a ideia de que esses programas não apenas formam os futuros professores, mas também os posicionam como protagonistas na transformação do ensino e na prática pedagógica. Segundo Soares (2018), programas como esses incentivam uma reflexão crítica sobre as práticas pedagógicas, permitindo que os estudantes bolsistas se tornem agentes de mudança na educação básica.

A atuação dos bolsistas de programas de iniciação à docência, como o PIBID, também enfatiza o impacto da experiência prática tanto na formação dos estudantes quanto no fortalecimento da educação básica. No caso da Feira de Matemática, a participação de 9 bolsistas na apresentação de trabalhos reflete o impacto desses programas no desenvolvimento de competências acadêmicas e pedagógicas dos alunos de licenciatura. De acordo com Santos e Lima (2019), a interação direta com a comunidade escolar e a elaboração de projetos colaborativos proporcionam aos bolsistas uma compreensão mais profunda da dinâmica de ensino-aprendizagem, além de favorecerem o protagonismo discente.

A observação de que um trabalho foi submetido por uma professora que atua na escola campo do RP, embora sem vínculo formal com o programa, também é um dado relevante para a análise. Pois, os programas têm um impacto não apenas sobre os bolsistas, mas também sobre os professores das escolas parceiras, que se beneficiam da troca de experiências e da colaboração com os acadêmicos (BRASIL, 2016). A professora mencionada pode ter se sentido influenciada

pelo conhecimento e pelas práticas adquiridas através da interação com o RP, sugerindo que a experiência de colaboração entre a universidade e a escola pode gerar um impacto significativo sobre os docentes da rede pública, mesmo que não haja uma vinculação formal. Esse fenômeno é corroborado por estudos que discutem a importância da parceria entre a universidade e a escola na formação contínua de professores (GARCIA; SANTOS, 2019). A participação de professores em atividades como feiras acadêmicas, mesmo sem vínculo direto com os programas, é um reflexo da mobilização que esses programas geram dentro da escola, incentivando os docentes a se engajarem em práticas pedagógicas inovadoras e a se atualizarem profissionalmente.

O impacto dos programas RP e PIBID na educação matemática é especialmente notável. A Feira de Matemática de Abaetetuba, ao destacar projetos vinculados a esses programas, evidencia como a formação inicial de professores de matemática pode ser enriquecida por experiências práticas e interdisciplinares. Estudos de Souza e Almeida (2020) mostram que iniciativas como essas fortalecem o ensino da matemática, ao possibilitar aos futuros professores a vivência de novas metodologias de ensino, como o uso de tecnologias e práticas mais contextualizadas. Além disso, a alta participação de trabalhos vinculados aos programas RP e PIBID também reflete o papel fundamental que esses programas têm na promoção da valorização da educação matemática, principalmente em contextos regionais. De acordo com Dias e Lima (2018), programas como o PIBID têm um papel estratégico na regionalização do ensino de matemática, contribuindo para a adaptação dos conteúdos às realidades locais e para a formação de professores que conhecem as especificidades da educação básica da sua região.

Em suma, os dados apresentados no Quadro 01 demonstram claramente a relevância dos programas RP e PIBID na promoção de projetos acadêmicos e na valorização da educação matemática na região de Abaetetuba. A participação ativa dos bolsistas na orientação e apresentação de trabalhos reflete a importância desses programas na formação de futuros professores e na melhoria da qualidade do ensino. Além disso, a participação de professores não vinculados formalmente, mas que se beneficiaram das experiências oferecidas pelos programas, destaca a capacidade de mobilização e impacto desses programas nas práticas pedagógicas de toda a comunidade escolar.

Nesse sentido, no Quadro 01, observa-se claramente a importância dos programas de Residência Pedagógica (RP) e Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) na realização da Feira de Matemática. Dos 45 trabalhos apresentados, 34 estavam diretamente vinculados a esses programas, o que representa uma contribuição significativa para o evento. Dentre esses 34 trabalhos, 25 foram orientados por bolsistas dos programas, refletindo o papel ativo que esses estudantes desempenharam na formação e acompanhamento de alunos

expositores. Além disso, 9 dos trabalhos foram efetivamente apresentados por bolsistas, destacando sua participação não apenas na orientação, mas também na elaboração e exposição de projetos.

Além disso, em contraste, 11 trabalhos expostos na feira não tiveram qualquer ligação com os programas RP e PIBID. É relevante notar que, entre esses 11 trabalhos, um foi submetido por uma professora que atua na escola campo do PRP, embora ela não estivesse formalmente vinculada ao programa. Isso sugere que sua experiência e conhecimento, adquiridos através da relação com o PRP, podem ter influenciado sua decisão de participar do evento, demonstrando a interconexão entre os programas e as práticas docentes na comunidade.

Portanto, ao analisar os dados apresentados, conclui-se que, dos 45 trabalhos expostos na Feira Municipal de Matemática de Abaetetuba, apenas 10 foram apresentados e orientados por estudantes e professores que não possuíam nenhuma conexão com os programas RP e PIBID. Esse resultado evidencia a relevância e o impacto que essas iniciativas têm na promoção de projetos acadêmicos e na valorização da educação matemática na região.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A I FEMAT, destacou-se como um marco significativo para a promoção da educação matemática, proporcionando um espaço enriquecedor de aprendizado e troca de experiências. O evento, que incluiu uma variedade de atividades como palestras, minicursos e exposições de trabalhos, não apenas estimulou a curiosidade acadêmica, mas também incentivou a pesquisa e a inovação na área da matemática.

A análise dos dados coletados durante a feira revela a contribuição essencial dos programas de Residência Pedagógica e Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência. Com 34 dos 45 trabalhos apresentados vinculados a esses programas, ficou evidente o papel ativo dos bolsistas na orientação e elaboração de projetos, reforçando a importância dessas iniciativas para a formação docente. A participação direta de alunos e professores, que tiveram a oportunidade de expor seus trabalhos e interagir com a comunidade acadêmica, demonstrou a eficácia dos programas em promover um ambiente educacional colaborativo.

Em suma, a I FEMAT não apenas proporcionou uma plataforma para a apresentação de trabalhos acadêmicos, mas também serviu como um catalisador para o desenvolvimento profissional e a valorização da educação matemática. Os resultados obtidos reafirmam a necessidade de continuar investindo em programas como o PRP e PIBID, que demonstram seu impacto positivo na formação de futuros educadores e na promoção de uma educação matemática de qualidade na comunidade.

REFERÊNCIAS

- BRASIL. *Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID: regulamentação e diretrizes*. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Superior. Brasília: MEC, 2016.
- DIAS, F. A.; LIMA, M. C. O PIBID como estratégia para a regionalização do ensino de Matemática: a experiência de formação no interior do Brasil. *Revista Brasileira de Educação Matemática*, v. 34, n. 3, p. 151–167, 2018.
- FREITAS, T. L. Formação inicial de professores e a prática pedagógica: o papel dos programas de residência pedagógica. *Revista Brasileira de Formação de Professores*, v. 15, n. 2, p. 45–61, 2020.
- GARCIA, M. R.; SANTOS, E. P. A colaboração universidade-escola na formação continuada de professores de Matemática. *Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação*, v. 27, n. 104, p. 233–252, 2019.
- LIMA, J. F.; SILVA, D. P. Reflexões sobre a formação de professores a partir da experiência no PIBID. *Revista de Educação da Universidade Estadual de Goiás*, v. 13, n. 1, p. 29–42, 2019.
- SANTOS, G. L. A importância da prática na formação inicial de professores: a integração entre teoria e prática. *Revista Educação e Pesquisa*, v. 43, n. 2, p. 271–285, 2017.
- SOARES, M. A. A formação docente no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e sua contribuição para a educação básica. *Revista Brasileira de Formação e Educação*, v. 16, n. 3, p. 110–126, 2018.
- SOUZA, R. C.; ALMEIDA, V. M. Inovações no ensino da Matemática: a contribuição dos programas de residência pedagógica e PIBID. *Revista Brasileira de Educação Matemática*, v. 32, n. 1, p. 55–72, 2020.

UM OLHAR INTERDISCIPLINAR ENTRE GEOMETRIA ESPACIAL E A GEOMETRIA MOLECULAR NAS AULAS DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

  10.56238/livrosindi202535-026

Marluci Rodrigues Martins

E-mail: marlucirodrigues04@gmail.com

Rubervaldo Monteiro Pereira

E-mail: rubenp@ufpa.br

RESUMO

Este artigo aborda um olhar interdisciplinar entre Geometria Espacial e Geometria Molecular nas aulas de matemática no ensino médio, utilizando a metodologia ativa, aprendizagem baseada em projeto (ABP), tendo como intuito de apresentar informações sobre o processo de ensino-aprendizagem cuja interdisciplinaridade entre conteúdos de matemática e química são convergentes. Dessa forma tendo como objetivo principal analisar como o ensino das Geometria espacial e geometria molecular podem se correlacionar nas disciplinas de matemática e química no 1º ano do ensino médio. A metodologia deste trabalho constitui na pesquisa bibliográfica, exploratória de cunho qualitativo, com foco em Matemática. Que será aplicada no 1º ano na Escola de Ensino Médio Professora Isaura Baia, em Mocajuba-PA. Os possíveis resultados a partir da utilização ABP consiste em uma metodologia efetiva em que o aluno passa a ser mais participativo, instigado a atingir competência e habilidades que permitirá aquisição do conhecimento de forma eficaz, em todo o processo de ensino-aprendizagem.

Palavras-chave: Geometria Espacial, Geometria Molecular, Interdisciplinaridade.

1 INTRODUÇÃO

Historicamente, o conhecimento geométrico surgiu da necessidade de entender e interpretar o ambiente em que as pessoas viviam. Essa busca por compreensão levou ao desenvolvimento de conceitos e práticas geométricas. Em tese, Eves (1997 apud Piasieski, 2010) outrossim, descreve que a geometria teve sua origem no Egito, surgindo da necessidade das medidas de terra que eram inundadas pelo rio Nilo. Nesse sentido, o trabalho consiste analisar a geometria molecular e espacial no ensino-aprendizagem de Matemática, levando em conta a interdisciplinaridade entre Geometria Espacial e Geometria molecular.

Compreende-se que as duas geometrias embora distintas, convergem-se em um ponto comum, em que uma dá suporte a outra, completando-se no processo do ensino-aprendizagem. Em virtude que em sala aula os conteúdos de matemática em sua maioria não são adquiridos com facilidade pelos alunos, principalmente no ensino médio, uma vez que os alunos não conseguiram uma boa aquisição do conhecimento no ensino fundamental.

Diante disso cabe o questionamento: Que metodologia é utilizada pelos professores ao trabalhar geometria espacial e molecular com os alunos do primeiro ano do ensino médio? E como é trabalhada a interdisciplinaridade dos conteúdos?

Tais problemáticas orientam o estudo por meio do objetivo geral, analisar como o ensino das Geometria espacial e geometria molecular podem se correlacionar nas disciplinas de matemática e química no 1º ano do ensino médio, o qual desmembra-se nos específicos visa: (i) Averiguar as práticas metodológicas utilizada para o ensino de geometria; (ii) Relatar/explicar quais as implicações do ensino da Geometria como um conteúdo interdisciplinar.

Portanto, esse projeto de intervenção, visa analisar as dificuldades no ensino-aprendizagem que é um dos maiores problemas em sala de aula, uma vez que, os alunos apresentam desde o ensino fundamental na não compreensão dos conteúdos matemáticos.

2 GEOMETRIA ESPACIAL E GEOMETRIA MOLECULAR

Nesta seção compreenderemos alguns conceitos relevantes a respeito de Geometria espacial, Geometria Molecular, o ensino-aprendizagem de matemática no que diz respeito a Geometria espacial e a BNCC, bem como também salientaremos sobre a interdisciplinaridade entre a geometria espacial e geometria molecular e por fim, a aprendizagem baseada em projetos.

2.1 PRINCIPAIS CONCEITOS DE GEOMETRIA ESPACIAL

O conceito de geometria espacial está vinculada diretamente a medidas ou dimensões tridimensionais, como ressalta Silva e Victor (2017). Em sala de aula o estudo da geometria espacial, faz uso dos sólidos e ângulos para a compreensão e interpretação do aluno no sentido das dimensões no espaço, noções de profundidade, comprimento, largura e volume.

Faz-se necessário que haja uma conexão entre os conceitos geométricos e o mundo real. Quando a geometria é ensinada de forma isolada, sem um contexto prático, os alunos tendem a ver a disciplina como irrelevante para suas vidas. Como apontado por Rezende (2019, p. 23), "a ausência de exemplos do cotidiano no ensino de geometria espacial faz com que muitos alunos não consigam perceber a aplicabilidade do que estão aprendendo, o que reduz o interesse e a motivação."

2.2 PRINCIPAIS CONCEITOS DE GEOMETRIA MOLECULAR

As representações das moléculas no espaço de formas tridimensionais e bidimensionais que, por sua vez, relaciona a fórmula molecular, as características da molécula e estrutura geométrica, denomina-se de geometria Molecular (Creppe, 2009).

No ensino de Geometria molecular, a imagem é de fundamental importância para que os alunos possam ver os tipos de ligações dos átomos na estrutura molecular. Segundo Farias *et al.* (2014) o uso de modelos tridimensionais comparando-se com as representações bidimensionais, facilitam o entendimento das fórmulas e disposição espacial dos átomos nas moléculas.

2.3 O ENSINO APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA: GEOMETRIA ESPACIAL E A BNCC

O ensino da matemática nas escolas públicas tem sido uma preocupação, devido as inúmeras dificuldades que os alunos enfrentam desde os anos iniciais. De acordo com Piovesan e Zanardini, (2008, p. 2). “A matemática tem sido uma disciplina que apresenta inúmeras dificuldades no processo ensino-aprendizagem, tanto para os alunos, como aos professores em sala de aula”. Uma vez que no processo de ensino- aprendizagem, faz-se necessário que haja o mútuo interesse tanto do professor quanto do aluno.

Quando nos deparamos com o estudo da geometria espacial no ensino médio, que tradicionalmente, envolve o estudo de sólidos geométricos, suas áreas, volumes e propriedades, leva o aluno um esforço maior na compreensão, fazendo com ele possa exercer algumas competência e habilidades necessárias para essa nova etapa de ensino- aprendizagem.

De acordo com a BNCC (2018) No Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, [...]. Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos alunos. Nesse sentido, cabe ao professor criar metodologias que venham ser exequíveis de acordo com o documento da BNCC.

2.4 A INTERDISCIPLINARIDADE ENTRE A GEOMETRIA ESPACIAL E GEOMETRIA MOLECULAR

A geometria espacial no ensino médio, tradicionalmente, envolve o estudo de sólidos geométricos, suas áreas, volumes e propriedades. Quando integrada à geometria molecular, uma área de estudo da química que analisa a disposição tridimensional dos átomos em moléculas, essa geometria pode ganhar um novo significado.

Por exemplo, moléculas como o metano (CH_4) têm uma geometria tetraédrica, e o estudo dessa forma geométrica pode ser trabalhado nas aulas de geometria espacial para demonstrar como sólidos geométricos abstratos estão presentes no comportamento molecular.

Neste sentido, a interdisciplinaridade entre as disciplinas escolares, sugere inúmeras metodologias a serem desenvolvidas visando potencializar um maior significado aos conteúdos escolares contribuindo para uma formação mais holística preparando o aluno para a vida no seu cotidiano. (Oliveira et al, 2016, p. 35).

2.5 APRENDIZAGEM BASEADA EM PROJETOS

Segundo o PCNs (2000) que direciona suas orientações ao Ensino Médio, afirma que, aprender Matemática no Ensino Médio vai além de uma memorização de resultados dessa ciência, e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada/atrelada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático.

Diante disso, para que haja aquisição do conhecimento de forma atrelada ao domínio do saber matemático, faz-se necessário que o professor envolva o aluno numa metodologia de projetos cujo objetivo é desenvolver as competências e habilidades necessárias na construção do ensino-aprendizagem. Vale salientar que em projetos efetivos são trabalhados oito atributos, segundo sendo:

1. Reconhecem o impulso para aprender, intrínseco dos alunos.
2. Envolvem os alunos nos conceitos e princípios centrais de uma disciplina.
3. Destacam questões provocativas.
4. Requerem a utilização de ferramentas e habilidades essenciais, incluindo tecnologia para aprendizagem, autogestão e gestão do projeto.
5. Especificam produtos que resolvem problemas.
6. Incluem múltiplos produtos que permitem *feedback*.
7. Utilizam avaliações baseadas em desempenho.
8. Estimulam alguma forma de cooperação.

Nesse sentido, o docente poderá obter um ensino com mais eficiência, para estimular o aluno no aprendizado dos conteúdos matemáticos, utilizando a metodologia, cuja os oito atributos realizam uma percepção do conhecimento do aluno de forma geral, provocando-os a um pensamento crítico-reflexivo de tudo aquilo que chamamos de problemas matemáticos.

3 METODOLOGIA

A metodologia deste trabalho constitui *Um Olhar Interdisciplinar entre Geometria Espacial e Geometria Molecular*, tendo como base a pesquisa bibliográfica, exploratória de cunho qualitativo, com foco em Matemática. Que será aplicada no 1º ano na Escola de Ensino Médio Professora Isaura Baia, em Mocajuba-PA.

A pesquisa bibliográfica consiste em uma revisão de teorias e práticas de ensino de geometria, além de metodologias de ensino que promovem a aplicação dos conceitos de geometria em contextos concretos. De acordo com Gil (2010), a pesquisa bibliográfica é essencial para construir um arcabouço teórico que auxilie o docente a fundamentar suas práticas pedagógicas e planejar aulas que envolvam a resolução de problemas aplicados.

No que tange à pesquisa qualitativa, segundo Godoy (1995, p. 62), nessa abordagem, “[...] valoriza-se o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo examinada”. Dessa forma, busca-se essa subjetividade dos comportamentos metodológicos na área do ensino-aprendizagem, na interação entre aluno e professor, investigando as metodologias ativas para o ensino de matemática baseadas nos autores Bacich e Moran (2017).

- No primeiro dia de aula, tendo 90 minutos/hora aula corridos será trabalhada a Geometria Espacial, abordando o conceito tridimensional dos sólidos geométricos, tetraedro, icosaedro, cubo entre outros. Aplicarei uma atividade demonstrativa dos sólidos, em que os alunos irão classificar os cujo sua especificidade de acordo com seus conhecimentos adquiridos e conhecimento de mundo. Logo após, faremos a correção em sala para que seja esclarecida e sanada as dúvidas. Nesse primeiro momento, o atributo de projeto utilizado será: *Reconhecem o impulso para aprender, intrínseco dos alunos*. (Buck, 2008 apud Bacich e Moran, 2017, p. 7).
- No segundo dia de aula, equivalente a 90min/hora aula, abordaremos sobre a Geometria Molecular, trabalhando como as moléculas se dispõem no espaço. Nesse momento, buscaremos levar ao aluno o conhecimento sobre as mais diversas estruturas moleculares presentes no seu cotidiano. A atividade proposta será investigativa seguido de perguntas provocativas, instigando-os a uma percepção das estruturas encontradas, como: fulereno, metano e a estrutura molecular hexafluoreto de enxofre. A partir dessa atividade trabalhada, pode-se aplicar o atributo que *destacam questões* provocativas no aluno, fazendo com eles possam ter a competência de identificar tais estruturas moleculares. (Buck, 2008 apud Bacich e Moran, 2017, p. 7).
- No terceiro dia de aula, trabalharemos a Interdisciplinaridade entre a Geometria Espacial e a Geometria Molecular, uma vez que, a Matemática possui funções que ajudam a nomear conceitos em estruturas da disciplina de Química, fazendo com que haja uma dependência ou um empréstimo do uso de conceitos matemáticos para a disciplina de Química. Nesse momento iremos trabalhar com os alunos os conceitos primitivos da geometria espacial, propondo a eles uma atividade de construção das estruturas moléculas. A partir dessa aula poderemos aplicar dois atributos da metodologia de projetos efetivos sendo: *Utilizam avaliações baseadas em desempenho; estimulam alguma forma de cooperação*. (Buck, 2008 apud Bacich e Moran, 2017, p. 7).

Após aplicar nas aulas de matemática as atividades conceituais de geometria espacial e geometria molecular, correlacionando-as no sentido da interdisciplinaridade, utilizando os atributos da metodologia de projetos que contribuirá para uma avaliação eficaz do processo de ensino aprendizagem, obteremos um resultado satisfatório dessa metodologia utilizada.

4 RESULTADOS A PARTIR DA ABP

Ao se trabalhar a Aprendizagem Baseada em projetos (ABP), em conteúdos matemáticos geometria espacial e geometria molecular, utilizando os atributos de Bacich e Moran (2017) possibilitará ao aluno, ter um novo olhar sobre a interdisciplinaridade envolvendo as duas disciplinas com conteúdo diferentes, porém estão atreladas ao mesmo tempo.

Utilizando ABP o aluno poderá ter a competência e a habilidade de analisar, reconhecer, se envolver e ser provocado, diante dos conteúdos ministrados em sala. Com isso, ao ser utilizada metodologia efetiva do projeto, o professor terá outros métodos de ensino-aprendizagem capaz de envolver o aluno nas mais diversas atividades.

É importante ressaltar que durante esse processo, a interdisciplinaridade será um dos pontos a está em destaque, visto que a disciplina de matemática ao ser trabalhado o conteúdo geometria espacial, reverbera até ao ponto que se converge a um denominador comum que é utilizado na geometria molecular, desta forma os alunos poderão identificar as formas que utilizam em matemática que também desenvolvimento cognitivo do aluno.

REFERÊNCIAS

- BACICH, L.; MORAN, J. *Metodologias ativas para uma educação inovadora*. 2016. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/7722229/mod_resource/content/1/Metodologias-Ativas-para-uma-Educacao-Inovadora-Bacich-e-Moran.pdf. Acesso em: 01 nov. 2024.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/abril-2018-pdf/85121-bncc-ensino-medio/file>. Acesso em: 30 out. 2024.
- BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais*. Ministério da Educação, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>. Acesso em: 13 ago. 2024.
- CREPPE, C. H. *Ensino de Química Orgânica para Deficientes Visuais empregando modelo molecular*. 2009.
- FARIAS, F. M. C. et al. Construção de um modelo molecular: uma abordagem interdisciplinar química-matemática no ensino médio. *Revista Virtual de Química*, v. 7, n. 3, p. 849–863, 2014.
- GIL, A. C. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. São Paulo: Atlas, 2010.
- GODOY, A. S. Uma visão histórica dos principais autores e obras que refletem esta metodologia de pesquisa em ciências sociais. 1995. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rae/v35n2/a08v35n2.pdf>. Acesso em: 01 nov. 2024.
- PIOVESAN, S. B.; ZANARDINI, J. B. O ensino e aprendizagem da matemática por meio da metodologia de resolução de problemas: algumas considerações. Paraná, 2008. Disponível em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_sucileiva_baldisser_a_piovesan.pdf. Acesso em: 02 out. 2024.
- PIASESKI, C. M. *A geometria no ensino fundamental*. Erechim: URI, 2010. Disponível em: https://www.uricer.edu.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/1271.pdf. Acesso em: 13 out. 2024.
- REZENDE, D. C. Interdisciplinaridade no ensino de matemática e química: projetos e práticas. *Educação em Foco*, v. 14, n. 2, p. 56–70, 2019.
- REZENDE, D. C. Interdisciplinaridade no ensino de matemática: práticas e desafios. *Revista Brasileira de Educação Matemática*, v. 12, n. 1, p. 78–89, 2019.
- VECHI, A. M. Visualização espacial no ensino de geometria. *Revista de Educação Matemática*, v. 7, n. 2, p. 123–132, 2010.

RELATO DE EXPERIÊNCIA: TUTORIA DISCENTE NO ANO DE 2024

  10.56238/livrosindi202535-027**Ozias Alfaia da Costa**

E-mail: ozias.costa@cameta.ufpa.br

Júlio Roberto Soares da Silva

E-mail: julioroberto@ufpa.br

RESUMO

Este relato conta uma experiência de tutoria estudantil realizada ao longo de um ano em quatro turmas de graduação com enfoque em matemática. O projeto fez parte do Programa de Tutoria Estudantil da Universidade Federal do Pará (UFPA), que tem como objetivo ajudar os alunos com dificuldades acadêmicas e criar um ambiente de aprendizado colaborativo e inclusivo. O tutor ajudou os alunos a resolver dúvidas acadêmicas, materiais elaborados para aulas, e acompanhou o rendimento dos estudantes além de incentivar a participação ativa dos mesmos durante as aulas. Diversas estratégias foram empregadas para promover a interação entre os participantes do curso; atividades de grupo e discussões em duplas foram realizadas juntamente com a utilização de recursos digitais e conexão dos temas abordados com o ambiente profissional dos alunos. Técnicas como Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), resolução de problemas e execução de atividades práticas contribuíram para fortalecer o processo de aprendizagem na turma. Enfrentamos desafios relacionados à diversidade dos estudantes e ao nível inicial de engajamento por parte deles. Com relação aos resultados obtidos após essas mudanças implementadas no ensino notou-se uma melhoria significativa tanto no desempenho acadêmico quanto no interesse demonstrado pelos alunos. Somado a isso houve um desenvolvimento pedagógico notável por parte do tutor responsável pelas disciplinas ministradas. Essas vivências destacaram como a orientação é crucial no percurso acadêmico ao conectar conhecimento teórico e prático e promover uma educação mais autêntica e acolhedora.

Palavras-chave: Tutoria discente, Ensino de Matemática, Metodologias ativas, Formação acadêmica. Ensino superior.

1 INTRODUÇÃO

Este relato tem como objetivo descrever a experiência de tutoria discente com foco na disciplina de matemática realizada em quatro turmas de graduação do ensino superior tendo como público alvo discente com dificuldades acadêmicas que os impeçam de avançar regularmente em seu percurso acadêmico. Tal experiência teve um período de duração de um ano.

O Programa de Tutoria Discente da Universidade Federal do Pará (UFPA) foi criado com o objetivo de apoiar e complementar a formação acadêmica dos estudantes, especialmente aqueles que enfrentam dificuldades em disciplinas essenciais. A tutoria é uma estratégia pedagógica que visa promover um ambiente de aprendizado colaborativo e inclusivo, onde os alunos possam esclarecer dúvidas, desenvolver habilidades e aprimorar seu desempenho acadêmico.

A tutoria foi realizada em quatro turmas de graduação, com foco na disciplina de Matemática, que é frequentemente considerada desafiadora por muitos estudantes.

2 FUNÇÃO DO TUTOR DISCENTE

As responsabilidades como tutor discente incluíam, auxiliar os alunos em suas dúvidas relacionadas ao conteúdo das disciplinas, oferecendo explicações claras e concisas; Promover debates e discussões em sala sobre temas relevantes, encorajando a troca de ideias entre os alunos; Prover feedback construtivo sobre o desempenho dos alunos, ajudando-os a identificar áreas de melhoria; preparar materiais didáticos que fossem relevantes e úteis para os alunos, garantindo que os recursos fossem alinhados com o currículo; monitorar o progresso dos alunos, identificando aqueles que precisavam de ajuda adicional e oferecendo suporte personalizado; facilitar a comunicação sendo um elo entre os alunos e os professores, ajudando a transmitir informações e feedback, além de representar as necessidades e preocupações dos alunos; motivar e incentivar os alunos a se manterem engajados e motivados em seus estudos, promovendo uma atitude positiva em relação ao aprendizado.

Essas responsabilidades contribuem para o desenvolvimento acadêmico e pessoal dos alunos, promovendo um ambiente de aprendizado mais eficaz e acolhedor.

3 INTERAÇÃO COM OS ALUNOS

Inicialmente para promover a interação entre os alunos, optou-se por implementar algumas dinâmicas. Organizou-se os alunos em pequenos grupos, permitindo que discutissem e resolvessem pequenos problemas envolvendo matemática básica. Essa abordagem realizada em todas as turmas fomentou a colaboração e o aprendizado ativo. Possibilitando um diagnóstico Inicial preciso. Na turma de Engenharia Civil, utilizou-se maquetes e softwares de modelagem para ilustrar conceitos. Em Sistema de Informação, foi trabalhada simulações de situações de desenvolvimento de software, o que gerou grande interesse. As “Discussões em Pares: Incentivou os alunos a explicarem uns aos outros o conteúdo estudado, promovendo uma aprendizagem mais significativa.

Os alunos mostraram-se receptivos às dinâmicas propostas. A maioria expressou que as explicações eram claras e que as atividades práticas facilitaram a compreensão. Nos grupos de estudo, muitos relataram que a troca de ideias ajudou a solidificar o aprendizado, facilitando a compreensão.

Para engajar os alunos e facilitar o aprendizado utilizou-se como estratégias, ferramentas digitais, como *quizzes* online e fóruns de discussão, para tornar as aulas mais interativas e dinâmicas. Para o estímulo à participação foi feita perguntas desafiadoras, relacionadas ao conteúdo estudado, incentivando os alunos a pensar criticamente e a participar ativamente das discussões. Foi relacionado os conteúdos abordados com situações do mercado de trabalho, aumentando a relevância do aprendizado.

As estratégias de engajamento e as dinâmicas de interação promovidas resultaram em um ambiente de aprendizado colaborativo e produtivo. O feedback dos alunos foi positivo, evidenciando que as abordagens utilizadas facilitaram sua compreensão e interesse pela disciplina.

No decorrer da experiência em sala e após atividades realizadas constatou-se que a maioria dos alunos das turmas de graduação apresentavam dificuldades na assimilação de conceitos e resoluções de atividades relacionadas a matemática Básica. Essas dificuldades impactavam diretamente seus desempenhos acadêmicos e sua confiança em lidar com conteúdo matemáticos.

As turmas apresentavam o seguinte contexto: Os alunos apresentavam dificuldades em conceitos fundamentais de matemática, como álgebra e trigonometria, que são essenciais para o entendimento de disciplinas avançadas como Estruturas e Cálculo.

4 METODOLOGIAS UTILIZADAS

Para abordar as dificuldades apresentadas foi adotada a metodologia de Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP). Essa abordagem pedagógica se concentra na resolução de problemas reais e desafiadores e incentivam os alunos a se tornarem protagonistas do seu aprendizado.

Durante o processo de tutoria diversas metodologias pedagógicas foram implementadas para facilitar o entendimento dos conceitos matemáticos e atender às diferentes necessidades dos alunos. As principais abordagens incluíram:

- 1. Resolução de Problemas:** Esta metodologia foi utilizada para estimular o raciocínio crítico e a aplicação prática dos conceitos matemáticos. Os alunos foram desafiados a resolver problemas reais relacionados às suas áreas de estudo, o que não apenas os motivou, mas também os ajudou a compreender a relevância da matemática em contextos práticos. A resolução de problemas em grupo incentivou a colaboração e a troca de ideias, promovendo um aprendizado mais dinâmico.

- 2. Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP):** A ABP foi uma abordagem central nas tutorias. Os alunos foram apresentados a casos práticos ou cenários que exigiam a aplicação de conceitos matemáticos para serem resolvidos. Essa metodologia não apenas desenvolveu habilidades de pensamento crítico, mas também promoveu a autonomia dos alunos, já que eles precisavam investigar, discutir e apresentar soluções. A ABP ajudou a conectar a teoria à prática, tornando o aprendizado mais significativo.
- 3. Uso de Tecnologias:** A integração de tecnologias nas tutorias foi fundamental para facilitar o entendimento dos conceitos matemáticos. Ferramentas como softwares de simulação, plataformas de aprendizagem online e aplicativos de matemática foram utilizados para criar um ambiente interativo e envolvente. Essas tecnologias permitiram que os alunos visualizassem conceitos abstratos de forma mais concreta, além de possibilitar a prática em ambientes virtuais, onde puderam experimentar sem medo de errar.
- 4. Atividades Práticas:** A realização de atividades práticas, como experimentos e projetos, foi uma abordagem eficaz para consolidar o aprendizado. Por exemplo, em Engenharia Civil, os alunos puderam aplicar conceitos matemáticos na elaboração de projetos estruturais, enquanto em Agronomia, realizaram medições e análises de dados em campo. Essas experiências práticas ajudaram a solidificar o conhecimento teórico, mostrando aos alunos a aplicação direta da matemática em suas futuras carreiras.

Essas metodologias, combinadas de forma estratégica, não apenas ajudaram a superar as dificuldades enfrentadas pelos alunos, mas também promoveram um ambiente de aprendizado colaborativo e ativo. A diversificação das abordagens permitiu que cada aluno encontrasse um método que se adequasse ao seu estilo de aprendizagem, resultando em um engajamento maior e uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos.

5 DESAFIOS ENCONTRADOS

No tocante aos obstáculos enfrentados alguns estudantes demonstraram uma certa relutância em se engajar, o que pode ser atribuído a fatores como a carga horária intensa, o estresse acadêmico.

Além disso, a diversidade de níveis de conhecimento entre os alunos apresentou um desafio significativo. Enquanto alguns estudantes demonstravam uma sólida compreensão dos conceitos fundamentais, outros lutavam para acompanhar o ritmo das aulas e as exigências do curso. Essa heterogeneidade exigiu dos tutores uma adaptação constante das estratégias

pedagógicas, buscando formas de atender às necessidades de todos os alunos, promovendo um ambiente de aprendizado inclusivo.

A variação na metodologia de ensino foi crucial para lidar com essas dificuldades. As tutorias foram estruturadas para incluir atividades práticas, discussões em grupo e apoio individualizado, visando atender tanto os alunos que precisavam de reforço quanto aqueles que buscavam aprofundar seu conhecimento.

A construção de um ambiente de confiança e abertura foi essencial para superar a resistência e fomentar a participação dos alunos. O diálogo constante e a escuta ativa foram ferramentas valiosas para entender as dificuldades individuais e coletivas, permitindo que as tutorias se tornassem um espaço de aprendizado colaborativo. A experiência, apesar dos desafios, também revelou o potencial transformador da tutoria discente, promovendo um aprendizado mais significativo e integrado entre os alunos.

6 RESULTADOS E APRENDIZADOS

A reflexão sobre os resultados alcançados durante a tutoria discente revela um aprendizado significativo tanto para mim quanto para os alunos.

Para os alunos, os resultados foram notáveis. Observou-se um aumento no engajamento e na participação nas atividades, especialmente entre aqueles que inicialmente demonstravam resistência. Ao aplicar metodologias como a resolução de problemas e a aprendizagem baseada em problemas, muitos alunos conseguiram não apenas melhorar seu desempenho acadêmico, mas também desenvolver habilidades essenciais, como o pensamento crítico e a capacidade de trabalhar em equipe. A aplicação prática dos conceitos em contextos reais ajudou a tornar o ensino da matemática mais acessível e relevante para eles, resultando em uma maior apreciação pela disciplina.

Pessoalmente, a experiência do ensino da matemática me proporcionou uma nova perspectiva sobre a disciplina. Aprendi que ensinar matemática vai muito além de transmitir fórmulas e teoremas; trata-se de cultivar um ambiente onde os alunos se sintam seguros para explorar, questionar e experimentar. A importância de adaptar as abordagens pedagógicas às necessidades individuais dos alunos tornou-se evidente, reforçando a ideia de que cada estudante possui um ritmo e um estilo de aprendizagem únicos.

Além disso, a experiência impactou minha visão sobre a matemática como uma disciplina que está intrinsecamente ligada a diversas áreas do conhecimento. A interdisciplinaridade ficou clara ao ver como os alunos aplicavam conceitos matemáticos em suas respectivas áreas de estudo, desde a análise de dados em Agronomia até o cálculo estrutural em Engenharia Civil.

Essa conexão ajudou a desmistificar a matemática, apresentando-a como uma ferramenta vital e prática.

Em resumo, a tutoria não apenas contribuiu para o crescimento acadêmico dos alunos, mas também me proporcionou uma compreensão mais profunda das nuances do ensino da matemática. A experiência reforçou a importância de metodologias ativas e da conexão da matemática com o mundo real, promovendo um aprendizado mais significativo e engajador.

7 CONCLUSÃO

A tutoria discente desempenhou um papel crucial no processo de ensino-aprendizagem, funcionando como um elo entre o conhecimento teórico e sua aplicação prática. Essa experiência de tutoria não apenas enriqueceu o aprendizado dos alunos, mas também proporcionou um espaço valioso para que eu pudesse desenvolver habilidades essenciais como a comunicação clara, a empatia e a capacidade de adaptação pedagógica.

A importância da tutoria se manifesta na criação de um ambiente de apoio e colaboração, onde os alunos se sentem mais à vontade para expressar suas dificuldades e buscar ajuda. Isso não apenas melhora a compreensão dos conceitos, mas também promove um senso de comunidade e pertencimento, essencial para o sucesso acadêmico. Além de possibilitar a identificação de gaps no aprendizado, permitindo intervenções mais rápidas e eficazes.

Em relação à minha formação acadêmica e profissional, essa experiência teve um impacto profundo. A prática da tutoria me fez perceber a importância de ser um educador que não apenas transmite conhecimento, mas que também inspira e motiva os alunos a se tornarem aprendizes ativos. Além disso, a vivência na monitoria reforçou meu compromisso com a educação e a busca por métodos inovadores de ensino, preparando-me para futuras funções que envolvam a educação, seja em sala de aula, em projetos de extensão ou em atividades de pesquisa.

Essa experiência também ampliou minha visão sobre a educação como um campo dinâmico e em constante evolução, onde a adaptação e a inovação são fundamentais para atender às necessidades de uma nova geração de alunos. Assim, a monitoria não apenas contribuiu para o sucesso dos alunos, mas também foi um catalisador significativo para meu próprio crescimento pessoal e profissional, reforçando minha paixão pela educação e pela matemática.

REFERÊNCIAS

FRISON, Lourdes Maria Bragagnolo. Tutoria entre estudantes: uma proposta de trabalho que prioriza a aprendizagem. *Revista Portuguesa de Educação*, v. 25, n. 2, p. 217–240, 2012.

NUNES, Thiago Soares et al. Gestão de tutoria: o papel do supervisor de tutoria. *Revista Novas Tecnologias na Educação*, v. 8, n. 1, 2010.

SEMIÃO, Filomena. *Tutoria: uma forma flexível de ensino e aprendizagem*. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade dos Açores, Açores (Portugal), 2009.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA OS ANOS INICIAIS: UMA VISÃO A PARTIR DE PROFESSORES DA REGIÃO DA ILHA GAMA – CAMETÁ/PA

 Crossref  10.56238/livrosindi202535-028

Francisco Ney Praseres Júnior

E-mail: francisconey026@gmail.com

Romulo Everton de Carvalho Moia

E-mail: romuloecm@ufpa.br

RESUMO

Este trabalho, tem como o objetivo principal do artigo analisar a história da matemática nos anos iniciais e como ela pode contribuir na formação de docentes na região das ilhas de Cametá. Para o desenvolvimento e constituição desse trabalho foi indispensável uma pesquisa de cunho qualitativa a partir de um estudo de caso, de início adotou-se uma revisão bibliográfica sobre a história da matemática e a formação de professores e suas principais reflexões, bem como a realização trabalho de campo e aplicação de questionários. Por fim, através de dados adquiridos percebemos que são grandes os desafios enfrentados pelo professor, visto que esse é o condutor do processo ensino aprendizagem, é aquele que apesar de não dominar o conteúdo, precisa se inserir em teorias e práticas da educação matemática verificando a necessidade de trabalhá-la, tanto nos cursos de formação de professores como nas séries iniciais do ensino fundamental para contribuir com o aprendizado do aluno.

Palavras-chave: Educação Matemática, História da Matemática, Ensino Aprendizagem.

1 INTRODUÇÃO

O Ensino da Matemática, destaca sua história intrinsicamente ligada aos números. Entretanto, a educação matemática busca consolidar nos discentes conceitos, atitudes e valores, pois a matemática é uma criação humana. Desse modo percebemos a importância dos estudos relativos a história da educação matemática nos anos iniciais e para o processo educativo é válido para a aprendizagem ao adquirir conhecimentos nas dimensões sociais, culturais e pedagógicas (Mendes, 2012).

Nestes termos, o presente trabalho aborda a necessidade de práticas relacionadas a história da matemática para os anos iniciais tendo como foco uma visão a partir de professores da região das ilhas do município de Cametá - PA, procurando destacar as contribuições advindas no processo de ensino aprendizagem, sua importância, seus desafios, limites e possibilidades. Nestes termos, definimos a seguinte problemática como central da pesquisa: *Como os professores formados em pedagogia visualizam a História da Matemática nos anos iniciais destacando os seus desafios em relação ao processo de ensino aprendizagem?*

Esperamos que este trabalho desperte o interesse de alunos e professores em termos de compreensão desse saber matemático. Neste sentido, o presente trabalho tem como objetivo geral, *analisar a história da matemática nos anos iniciais e como ela pode contribuir na formação de docentes na região das ilhas de Cametá*. Além disso, o trabalho apresenta os seguintes objetivos específicos: a) investigar a história da matemática e como ela é vista pelo professor a partir de sua formação; b) entender como a história matemática pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem e c) contribuir para o desenvolvimento de mais pesquisas despertando o interesse por essa temática.

Nestes termos, estrutura do trabalho está dividida em quatro seções. Além desta parte introdutória, o segundo tópico apresenta um referencial teórico, apresentando categorias e conceitos, nos quais estão embasadas a nossa pesquisa, evidenciando a história da matemática e suas teorias e a formação de professores. O terceiro traz as metodologias utilizadas para o desenvolvimento desse estudo. O último apresenta uma análise da história da matemática e sua relação com os professores nas ilhas do município de Cametá.

2 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, TEORIA E FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Um dos maiores desafios, da matemática, é romper com o ensino tradicional, onde os alunos têm que fazer apenas cálculos e não busca as habilidades de compreensão. Contudo, a matemática é uma disciplina que desempenha funções fundamentais à formação dos indivíduos, pois tem um papel importante na formação cidadã dos alunos, com as ações conscientes, sejam eles culturais, naturais, políticos.

Nessa perspectiva os estudos em história da matemática e educação em histórias de vida e formação, embasados na narrativa oral, técnicas de pesquisa e na memória se constituindo como área de produção do conhecimento. Entretanto nota-se que há a necessidade de muitos esclarecimentos acerca da introdução pedagógica da matemática na sala de aula em relação a teoria e prática, e evidente a necessidade de se incorporar novos conceitos e teorias de outras áreas do conhecimento para agregar com a história da matemática os saberes necessários na formação dos que ensinam matemática, em especial nos primeiros anos escolares relacionados aos saberes da profissão (Mendes, 2009), possibilitando metodologias inovadoras, formação didática que contribuem para a prática de docente.

No caso da matemática, segundo Valente (2016), existem duas concepções na formação docente: a matemática do nível superior que é diferente da matemática da escola básica pela forma complexa com que se ministram os conteúdos. As tendências atuais da História da Educação Matemática, se caracterizam pela mutabilidade e mistura de conceitos dando

significados a estudos com identidades culturais. As memórias de estudos matemáticos são essenciais para entender o processo de formação de professores, com dimensões ligadas a vida humana, a realidade social, dando qualidade a trabalhos na teoria e de forma prática

A Educação Matemática nos Parâmetros Curriculares Nacionais, se apoia nos currículos de história, sociologia e pedagogia num trecho que dialoga com seus objetivos pois, espera-se que ao final do primeiro ciclo os alunos e professores sejam capazes de identificar alguns documentos históricos e fontes de informações discernindo algumas de suas funções (Brasil, 1997).

Desse modo, a História da Educação Matemática é uma atividade pedagógica, metodológica e não deve ser vista apenas como uma disciplina a mais na prática educacional a ser acrescentada no currículo, deve estabelecer a relação entre teoria e prática no processo constante de ensino-aprendizagem, tendo como objetivo central o foco de ações a favor em prol da difusão do conhecimento.

Ao estudar a história da matemática de forma contextualizada, sensível às diferentes realidades, torna o processo de aprendizagem mais significativo, conectando professores e alunos com o ambiente ao seu redor, promovendo uma compreensão mais específica do espaço social. Para isso, são necessárias metodologias de ensino, que estimulem a observação, análise, investigação de problemas e a aplicação de atividades práticas com a resolução deles, visando formar alunos conscientes e participativos.

A prática educativa por parte dos professores, na escolha e implementação das metodologias e estratégias no processo de ensino são cruciais para cultivar um ambiente educacional dinâmico (Mendes, 2012).

Não resta dúvida das contribuições que metodologias de ensino da história da matemática podem oferecer na construção e produção de conhecimento na formação de professores em formação e na aprendizagem dos alunos, é possível promover a participação dos indivíduos e desenvolver levando-os a construção do conhecimento. Assim, destacamos que é possível o professor buscar metodologias, que possam mobilizar o interesse do aluno pelo conteúdo curricular, fazendo associação com o contexto local.

O conhecimento matemático deriva de necessidades humanas, portanto aliados a diferentes culturas e sociedades, ressaltando a importância do professor em formação conhecer conceitos, abordagens e metodologias (D'Ambrosio, 2007). Destaca-se a importância do caráter interdisciplinar, ou seja, as conexões da matemática com outras disciplinas em áreas do conhecimento colaborando para a interpretação de fenômenos numa visão ampla e contextualizada (Bonafini, 2016).

Todavia a situação atual do professor pedagogo revela o pouco contato deste com a história da matemática e seus conceitos, trazendo dificuldades para sua utilização em sala de aula por não ter contato profundo com a área na academia, o que acontece também na falta de cursos de formação durante sua formação.

3 DESCRIÇÃO METODOLÓGICA

O problema de pesquisa decorre de um processo que vai se delimitando na exploração dos contextos. Dessa forma, para alcançarmos nossos objetivos, desenvolvemos uma pesquisa de cunho qualitativa que envolve uma abordagem interpretativa do mundo, numa relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito (Marconi e Lakatos, 2010).

Implementamos um estudo de caso, que para Gil (1999) envolve o estudo profundo e exaustivo de um ou poucos objetos de maneira que permita seu amplo e detalhado conhecimento. Em relação ao método de interpretação, optamos por uma abordagem dialética mostrando os contrastes em um problema, os conflitos sociais (Chizzoti, 2006), que se fazem presente por analisar a realidade de professores com formação em Pedagogia da Ilha Gama Município de Cametá.

De início desenvolvemos o levantamento bibliográfico (Marconi e Lakatos, 2010). Nessa etapa, demos enfoque para: a teoria da matemática, evidenciando aspectos da história da ciência matemática nos anos iniciais, utilizando como base conceitual deste trabalho, na busca de atingir nossos objetivos.

Logo após, realizamos o trabalho de campo junto aos sujeitos da pesquisa. Para a ciência matemática, é fundamental a realização de pesquisas, e posteriormente de trabalhos acadêmicos, pois propiciam tangenciar as informações com os agentes sociais, com prática de campo para obter melhor aproveitando do que for discutido (Kaiser, 2006). Desta maneira, formulamos e aplicamos um questionário oportunizando-nos a entender percepções, opiniões e crenças, além de, sentimentos e interesses expectativa e situações do cotidiano (Gil, 2011), com a finalidade de coletar dados para somar as informações já adquiridas.,

Nesse sentido, houve a escolha do público-alvo a quem seriam destinadas as perguntas a professores das séries iniciais. As perguntas foram elaboradas com a preocupação de buscar solucionar nossas indagações. Participaram desta pesquisa 10 docentes e todos responderam o questionário, materializando descrições e análises de pontos convergentes e divergentes das informações do trabalho e obtendo dados concretos para nossa pesquisa.

3.1 OS LIMITES E POSSIBILIDADES DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS: UMA VISÃO DOS PROFESSORES DA ILHA GAMA MUNICÍPIO DE CAMETÁ

Analisar a história da matemática na formação de professores das series iniciais não se trata de uma tarefa fácil, principalmente quando estamos abordando o curso de pedagogia, os argumentos da importância deste segmento no processo de ensino e aprendizagem demonstrando a matemática presente no mundo e sua maneira de construção do conhecimento de sua história para a resolução de problemas.

Ao pensarmos na formação de professores pedagogos em uma realidade ribeirinha, devemos compreender questões relacionadas ao seu cotidiano e sua bagagem cultural imersa em realidades ribeirinhas da Amazônia, com dificuldades socioeconômicas, de uma ampla maioria que estudou em escola pública e conhece um pouco da realidade da história da educação matemática e seus desafios.

Nossa investigação contou com perguntas elaboradas com a preocupação de buscar entender o panorama da educação matemática e sua formação no curso de pedagogia da ilha Gama (Cametá/PA). Os questionamentos feitos aos professores com relação a temática em pesquisa, foram os seguintes: O que você entende por História da Matemática? Qual a importância de se ensinar História da Matemática? Por que é relevante contextualizar o ensino da matemática com a sua história? Você acredita que o conhecimento da História da Matemática pode ajudara a combater a ideia de que a Matemática é uma disciplina difícil? Quais os desafios você prevê ao introduzir a História da Matemática para alunos dos anos iniciais?

Todos os entrevistados têm a noção e reconhecem a importância da história da matemática para o trabalho formativo com futuros professores em anos iniciais como destacado pelo professor A:

No meu entendimento a história da matemática é o que deu origem aos elementos que conhecemos hoje como os símbolos que no decorrer do tempo foram se caracterizando até a forma que conhecemos hoje. Sua importância consiste em formar cidadãos críticos que vem entender como a matemática evoluiu ao longo do tempo.

Assim o trabalho com professores em formação para o entendimento da história da matemática é representativo tornando-os mais humanizados, criando uma aprendizagem significativa e com o objetivo de criar discentes críticos e pensantes desde as primeiras etapas dos anos iniciais.

Ao serem questionados sobre a contextualização e a interdisciplinaridade, os professores relataram as dificuldades dos cursos de pedagogia em fazer essa interação, apesar de compreenderem a possibilidade de compreensão mais profunda e conhecer a evolução dos conceitos sua evolução e aplicação, neste sentido o professor B nos colocou:

O desafio maior é associar história a matemática sabendo que são áreas distintas, o educador precisa se qualificar mais e conhecer profundamente seus alunos. O professor precisa ter o mínimo conhecimento de história.

Quando se pensa na matemática, tanto professores em formação quanto alunos, uma grande parte vê a disciplina, pragmática, condicionada a números e com alta dificuldade de compreensão e desenvolvimento de aprendizagem, mitos que a história da matemática pode auxiliá-la a desmistificar propondo estratégias, contextualizadas interativas e inovadoras, pensando desta forma ao serem questionados sobre este tema o professor C nos relatou:

Ao conhecer a história da matemática e de seus precursores vimos como estes associavam os seus conhecimentos a sua realidade vivida, dessa forma se sentiam mais motivados a fazer novas descobertas. Da mesma forma isso pode acontecer com as crianças das séries iniciais tornando a disciplina mais acessível, fazendo-as ver que o conhecimento matemático está no seu dia a dia.

Entretanto o que mais nos chamou a atenção neste trabalho são as dificuldades e os desafios dos professores para conhecer, compreender, explorar, colocar em prática metodologias relacionadas a história da educação matemática. O trabalho formativo com futuros professores dos anos iniciais não explora a os conceitos desta modalidade no curso de pedagogia, explora muito pouco os conceitos, quase não há cursos de formação, existe também uma grande falta de recursos e materiais didáticos para dar suporte a aprendizagem, como relatado pelo professor D:

O que mais faz falta são bons recursos didáticos: exemplo: materiais adequados para ensinar história da matemática, os professores têm que produzir seus próprios materiais utilizando recurso próprio, e as vezes se utilizando de material reciclado.

Nestes termos, verifica-se em materiais como o ábaco, o tangram contam e relatam as histórias dos povos que os criaram, podendo ser feitos as vezes com matérias didáticas que a escola pode fornecer, entretanto sabemos que nem todas as escolas dispõem de recurso necessário para adquirir, fazendo com que os professores utilizem seu próprio recurso para produzi-los. Segundo Pedrosa (2017) o Tangram, consiste em contar a história de três lendas envolvidas que contam sua origem e parte da história do povo chinês.

Outra, dificuldade relatada pelos professores são dificuldades com a manipulação desses materiais didáticos, seu completo desconhecimento, demonstrando o desconhecimento de conceitos, história e epistemologia básica da ciência matemática. É importante destacar que é preciso mais do que um simples domínio instrumental, mais um conhecimento das potencialidades proporcionadas por cada tipo de metodologia da história da matemática, de acordo com cada método de ensino a ser aplicado.

Outro desafio se refere ao número de aulas e quantidades de conteúdo a serem trabalhados em sala de aula. Os relatos indicam, para que seja trabalhado todos os conteúdos, o ideal seria aumentar a carga horária e o tempo de aula, de modo que os alunos pudessem ver o conteúdo gradativamente, unindo teoria e prática na construção do conhecimento.

Para 100% dos professores questionados a falta de bons cursos de formação e outra problemática apontada, evidenciadas, na falta de tempo, para fazer os cursos, a liberação da escola para fazer os cursos na falta de dinheiro para pagar bons cursos, na falta de equipamento próprio como computadores, são algumas das condições que impossibilitam o desenvolvimento pedagógico matemático dos professores.

Destacamos, o envolvimento desses docentes em nosso trabalho, com significativa participação e interesse desses sujeitos contribuindo para romper o desconhecimento, despertando o interesse, superando dificuldades já normalmente atribuído a matemática pelo senso comum. A história da matemática permite o contato de futuros docentes dos anos iniciais num campo com autonomia e diversos segmentos, possibilitando estratégias metodológicas críticas e inovadoras, sugerindo mudanças curriculares se consolidando em práticas da academia da escola.

Nestes termos são grandes os desafios enfrentados pelo professor, que é condutor do processo ensino aprendizagem. É o sujeito que apesar de não dominar o conteúdo, precisa se inserir em teorias e práticas da matemática verificando a necessidade de trabalhá-la nas séries iniciais do ensino fundamental. Não por sua culpa na maioria das vezes, mas sim do sistema em qual está inserido em sala de aula, o docente é visto como personagem principal, e tudo é direcionado a figura do professor, pois o mesmo deve ser o responsável pela transmissão de conteúdos críticos, concretos, sistemáticos e atualizado de acordo com a realidade.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho buscamos evidenciar a visão de professores em formação quanto ao uso da história da matemática, de modo a construir um panorama da discussão nas series iniciais do ensino fundamental numa região ribeirinha de Cametá. É válido destacar o interesse pela temática, e o aumento de investigações de seus resultados no processo ensino aprendizagem se refletem na falta de inserção da modalidade nos cursos de pedagogia. Esse estudo pode contribuir para fomentar discussões e debates acerca do assunto possibilitando novas ideias, reflexões e métodos, no pensamento de currículos e na formação de alunos e professores.

Ao buscarmos compreender sobre a abordagem da história da matemática, realizou-se uma pesquisa qualitativa trazendo autores e suas obras constatando sua importância, despertando nos educandos uma nova perspectiva de conhecimento e sua utilização nos diversos contextos. Os professores em formação puderam entender a matemática e sua história no meio social tentando resolver questões problemas na comunidade escolar e no meio social num viés em que o ensino não se manifesta apenas em teoria, mas também de forma prática.

Vimos que as políticas educacionais e os currículos destacam a importância da história da matemática nos anos iniciais nos PCN's explorando formas de contribuição da história da matemática na educação, acarretando na criação de valores e atitudes, habilidades e competências em professores e alunos. Por fim destacam-se os desafios a serem superados, evidenciados em péssimas condições de trabalho, déficit da história da matemática nos cursos de pedagogia, a dificuldade de se estabelecer a interdisciplinaridade, o acesso a recursos didáticos, a grande quantidade de conteúdo, a falta de bons cursos de formação são alguns dos grandes desafios a serem superados para se criar alunos conscientes de seu papel social, com atitudes críticas e pensantes perante as diversas situações e realidades.

REFERÊNCIAS

- BERNARD, K. O geógrafo e a pesquisa de campo. *Boletim Paulista de Geografia*, São Paulo, n. 84, p. 93–104, 2006.
- BONAFINI, F. C. *Metodologia do ensino da matemática*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.
- BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- CHIZZOTTI, A. *Pesquisa em ciências sociais*. 8. ed. São Paulo: Cortez, 2006.
- D'AMBROSIO, B. S. Reflexões sobre a história da matemática na formação de professores. *Revista Brasileira de História da Matemática*, Especial, n. 1, p. 399–406, 2007.
- FARIA, J. T. de. *A contribuição da história da matemática na formação dos professores das séries iniciais*. 2010. 81 f. Dissertação (Mestrado em História da Ciência) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- GIL, A. C. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.
- MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. *Fundamentos de metodologia científica*. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2010.
- MENDES, I. A. *Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- MENDES, Iran Abreu. Tendências da pesquisa em história da matemática no Brasil: a propósito das dissertações e teses (1990–2010). *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 14, n. 3, p. 465–480, 2012.
- PEDROSO, A. P. *Materiais concretos, história e ensino da matemática: interseções significativas para a prática pedagógica*. 2017. 227 f. Tese (Doutorado em Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- VALENTE, W. R. Les enjeux da pesquisa em história da educação matemática nos anos iniciais escolares. *Revista Diálogo Educacional*, v. 16, n. 48, p. 271–299, 2016.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM CIRCUITOS ELÉTRICOS RL E RLC

 Crossref  10.56238/livrosindi202535-029

Raimunda do Carmo Serrão Mendes
E-mail: raimunda.mendes@cameta.ufpa.br

José Renato Ferreira Alves da Cunha
E-mail: jrecunha@gmail.com

RESUMO

Este trabalho delinea um estudo sobre a Análise de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) aplicadas à área de Circuitos Elétricos, com ênfase em circuitos resistor-indutor (RL) e resistor-indutor-capacitor (RLC). A pesquisa explora as inter-relações e a modelagem matemática desses circuitos, proporcionando uma compreensão aprofundada de seus comportamentos dinâmicos. As aplicações abordadas abrangem Equações Diferenciais Ordinárias de primeira e segunda ordem, que retratam o comportamento desses circuitos elétricos onde podemos variar tanto quanto o capacitor, indutor, resistor e sua fonte. Com base nesse circuito analisamos a corrente elétrica para uma resposta natural em relevância das EDOs é principalmente em relação as suas aplicações exatas que deve se em fato de que a investigação de problemas que conseguem ser limitada à solução de tais equações. Este estudo comporta como suporte teórico o contexto histórico, as definições e os métodos escolhidos de EDOs como conceitos básicos de circuito. Afinal apresentamos algumas aplicações de problemas de circuito, solucionando a EDO como decorrente a partir dos dados conhecidos do problema investigado. Entretanto, as equações diferenciais são importante ferramenta matemática, dado que permitem descrever os processos, em modelar e resolver problemas e na compreensão de análise de fenômenos nos problemas.

Palavras-chave: Circuitos Elétricos, EDO, Aplicações, Equações Diferenciais, Análise.

1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática consiste em um conjunto de ferramentas matemáticas que podem ser utilizadas para descrever diversos fenômenos da realidade. As equações diferenciais são um dos ramos da matemática mais utilizados na aplicação e modelagem de fenômenos físicos. Desde o início tiveram um impacto importante na resolução e interpretação dos fenômenos. São utilizados para modelagem matemática de diversos fenômenos e problemas, por isso possuem aplicações amplas e fundamentais, principalmente nas áreas de ciências exatas com alta contribuição científica.

A análise das equações diferenciais ordinárias em circuitos elétricos, resistor, indutor (RL) e resistor-indutor-capacitor (RLC). esse aprendizado é importante para a compreensão de problemas reais em resolução de equações diferenciais ordinárias (EDOs) em circuitos elétricos

é uma tarefa fundamental em engenharia elétrica. e podem ser usadas para modelar e entender o comportamento de circuitos elétricos sob diferentes condições.

Conforme Boyce (2006, p.1) muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressas através de uma linguagem matemática, as relações são equações com taxas deriváveis, sendo também equações diferenciais. Portanto para compreendermos problemas envolvendo circuitos elétricos, aumento de população, terremotos e dentre outros, é necessário compreender as equações Diferenciais.

Uma citação de Boyce (2006) nos convida a uma viagem fascinante pelo universo das equações diferenciais e revela seu papel fundamental na compreensão dos mistérios do mundo físico, onde muitos dos princípios que regem o nosso mundo são expressos como declarações ou relações que de curso envolve mudar alguma coisa. Imagine que a gravidade molda a trajetória de uma bola lançada ao ar ou a taxa de crescimento populacional e estas leis físicas são como bússolas que nos guiam na nossa busca pelo conhecimento. Traduzir essas leis para uma linguagem universal e correta que nos apresente equações diferenciais. Imagine uma equação com uma taxa de variação, como a velocidade de um carro ou a variação da temperatura ambiente.

A modelagem dos circuitos elétricos RL e RLC foi feita resolvendo a EDO obtida a partir dos dados conhecidos do problema investigado, interpretando as soluções obtidas e expressando graficamente os resultados desse modo uma equação diferencial descreve algum processo físico que é chamado de modelo matemático. Para compreender as possibilidades e contribuições destes problemas. Esta equação, similar a um mapa meticulosamente elaborado, possibilita a previsão do comportamento do sistema ao longo do tempo. Ela sublinha a relevância das equações diferenciais na compreensão de variados fenômenos, desde os circuitos de nossos dispositivos.

A análise de circuitos elétricos, especialmente aqueles que envolvem componentes como resistores (R), indutores (L) e capacitores (C), é fundamental para a compreensão de diversos sistemas eletrônicos. A ferramenta matemática que permite modelar e analisar o comportamento desses circuitos são as equações diferenciais ordinárias (EDOs).

Neste trabalho, exploraremos o referencial teórico que sustenta a resolução de EDOs em circuitos RL e RLC e analisamos diferentes estratégias de solução assim, espera-se que este estudo ajude a compreender algumas das aplicações descritas do EDO no campo dos circuitos elétricos e a compreender os conceitos, propriedades e métodos relacionado.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 EQUAÇÃO DIFERENCIAL

Uma equação diferencial é uma equação que relaciona uma função desconhecida com suas derivadas e caracteriza-se por estabelecer uma relação entre uma função e uma ou várias de suas derivadas. A incógnita de uma equação diferencial é uma função, a qual se manifesta na equação por meio de suas derivadas. A ordem de uma equação diferencial refere-se à maior ordem da derivada presente na equação. A solução de uma equação diferencial de ordem n conterá n constantes.

2.2.1 Tipos de Equações Diferenciais

- **Equação Diferencial Ordinária (EDO):** Envolve uma função de uma única variável e suas derivadas. Por exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y).$$

Aqui, y é a função desconhecida de x , e a equação relaciona a taxa de variação de y com x .

- **Equação Diferencial Parcial (EDP):** Envolve uma função de mais de uma variável e suas derivadas parciais. Um exemplo clássico é a equação do calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Aqui, $u(x, t)$ é a função desconhecida de duas variáveis x e t , e a equação descreve a difusão do calor em um material ao longo do tempo.

2.2 EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINARIAS

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação matemática que relaciona uma função desconhecida (geralmente representada por y) com suas derivadas em relação a uma única variável independente (geralmente representada por x). Em outras palavras, uma EDO expressa uma relação entre uma função e sua taxa de variação. Formalmente, uma equação diferencial ordinária de ordem n pode ser representada como:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

Onde:

x: Variável independente.

y: Variável dependente (função de x).

$y', y'', \dots, y^{(n)}$: Derivadas de y em relação a x, de primeira até a n-ésima ordem.

F: Uma função arbitrária de x, y e suas derivadas

2.2.1 Classificação das EDOs

Ordem: A ordem de uma EDO é determinada pela derivada de maior ordem presente na equação.

Exemplo:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

y é a variável dependente

x (implícita) é a variável independente.

Linearidade: Uma EDO é linear se a função desconhecida e suas derivadas aparecem apenas com expoente 1 e não estão multiplicadas entre si.

Homogeneidade: Uma EDO é homogênea se o termo independente é igual a zero.

2.2.2 Tipos de EDOs

- **Lineares:** Todos os termos envolvendo y e suas derivadas aparecem com potência 1.
- **Não-lineares:** Existem termos com potências maiores que 1 ou produtos de y e suas derivadas.
- **Homogêneas:** Todos os termos possuem a mesma potência de y.
- **Não-homogêneas:** Existem termos que não possuem a mesma potência de y.
- **Coeficientes constantes:** Os coeficientes são números fixos.
- **Coeficientes variáveis:** Os coeficientes são funções de x.
- **Primeira ordem:** São equações diferenciais de primeira ordem a forma $y' = f(x, y)$ que podem ser resolvidas por métodos como separação de variáveis, fator integrante ou equações exatas.
- **Segunda ordem:** Estas têm a forma $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ que podem ser resolvidas por métodos como a equação característica (quando homogênea), variação de parâmetros ou o método dos coeficientes indeterminados.

3 CIRCUITOS ELETRICOS

Conjunto de componentes elétricos ligados de forma a possibilitarem a circulação de corrente elétrica através deles. Circuitos elétricos são trechos fechados, que iniciam e encerram no mesmo ponto.

Esses circuitos são formados por vários elementos interligados que viabilizam a passagem da corrente elétrica. ou seja, em um circuito elétrico simples encontramos vários caminhos que permitem o livre acesso das correntes elétricas. a corrente elétrica é o movimento ordenado das cargas elétricas. ou seja, é o fluxo organizado de partículas eletrizadas (íons ou elétrons). ela é representada pela letra “i” e é medida em ampere (a).

3.1 COMPONENTES ESSENCIAIS DE UM CIRCUITO

- **Fonte de tensão:** Fornece a energia para o circuito, como uma bateria ou uma tomada.
- **Condutores:** Geralmente fios de metal, permitem a passagem da corrente elétrica.
- **Componentes:** Dispositivos que realizam funções específicas, como lâmpadas, resistores, transistores, etc.
- **Interruptor:** Permite ligar e desligar o circuito, controlando o fluxo de corrente.

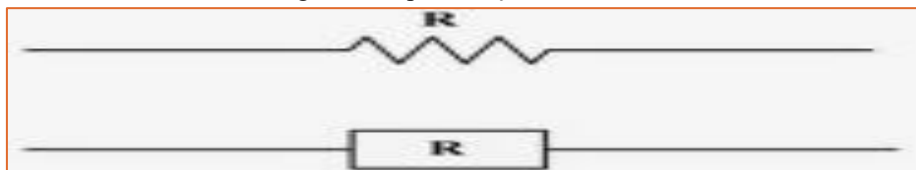
A fonte de tensão cria uma diferença de potencial elétrico, fazendo com que os elétrons se movimentem através do condutor. Esse movimento de elétrons é a corrente elétrica. Ao passar pelos componentes, a energia elétrica é transformada em outras formas, como luz (lâmpada), calor (resistor) ou movimento (motor).

3.2 ELEMENTOS DOS CIRCUITOS ELÉTRICOS

3.2.1 Resistores

Os resistores transformam energia elétrica em energia térmica e limitam o fluxo da corrente elétrica através do controle de voltagem.

Figura 1. Representação do Resistor



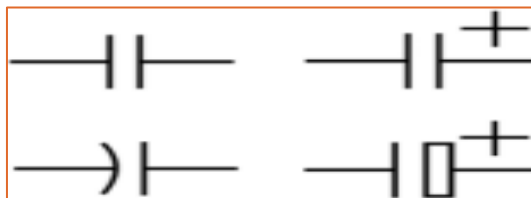
fonte: Fonte: Disponível em: < <http://mecatronizando.blogspot.com/2014/11/resistores.html>>. Acesso em: 18 de nov.

A tensão é proporcional à corrente (Lei de Ohm): $V = R \cdot I$

3.2.2 Capacitores

Dispositivos responsáveis por armazenar as cargas elétricas. Essas cargas são usadas sempre que a passagem da corrente elétrica é obstruída. Os capacitores são compostos por uma parte chamada armadura e por um material isolante chamado de dielétrico.

Figura 2: Representação do capacitor

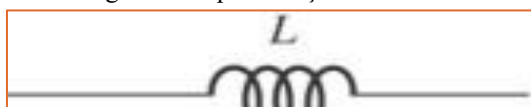


Fonte: Disponível em: Aplicações dos Capacitores | Resumo Escolar Acesso em: 18 de nov. 201

3.2.3 Indutores

Os indutores são elementos eletrônicos passivos que armazenam a energia elétrica em um campo magnético. O indutor também conhecido como bobina pode ser representado com o desenho de molas.

Figura 3: Representação do indutor



Fonte: Disponível em: < <https://athoselectronics.com/como-funciona-indutor/>>. Acesso em: 18 de nov. 2018.

Um indutor de indutância L se opõe a qualquer mudança na corrente produzindo uma queda de tensão. A tensão é proporcional à taxa de variação da corrente no tempo: $V = L \cdot \left(\frac{di}{dt}\right)$

3.3 TIPOS DE CIRCUITOS

Existem vários tipos de circuitos sendo os principais o circuito em série, circuito paralelo.

3.3.1 Circuito Série

os componentes são ligados de maneira a existir um único caminho contínuo para a passagem da corrente elétrica. a corrente elétrica em um circuito série é a mesma em todos os pontos do circuito, independentemente do valor de resistência dos componentes do circuito, enquanto que a tensão se divide entre os consumidores.

$$I_T = I_1 = I_2 = I_3 = \dots$$

$$E_T = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$$

a resistência total de uma associação em série é obtida matematicamente, através da fórmula:

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N$$

3.3.2 Circuito Paralelo

Os componentes estão conectados em ramos separados, oferecendo múltiplos caminhos para a corrente. a corrente elétrica se divide entre seus consumidores, enquanto a tensão em cada componente é a mesma da fonte (bateria)

Podemos representar matematicamente a tensão e a corrente da seguinte forma: $I_T = I_1 + I_2 + I_3 + \dots$

$$E_T = E_1 = E_2 = E_3 = \dots$$

O cálculo da resistência equivalente em um circuito paralelo depende do número de resistores presentes na associação, porque existe mais de uma fórmula para o cálculo da resistência total.

3.3.3 Circuitos RL

O circuito RL, composto por um resistor (R) e um indutor (L) em série com uma fonte de tensão, pode ser descrito por uma equação diferencial de primeira ordem. A tensão total aplicada é a soma da tensão no resistor e no indutor, resultando na EDO:

$$V(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t)$$

A solução desta equação revela a corrente em função do tempo, sendo influenciada pelos parâmetros R e L, e pela condição inicial da corrente.

3.3.4 Circuitos RLC

O circuito RLC, composto por resistor (R), indutor (L) e capacitor (C), pode ser modelado por uma equação diferencial de segunda ordem. Aplicando a Lei de Kirchhof, a equação resultante é:

$$V(t) = L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}$$

$q(t)$ é a carga no capacitor.

A solução desta equação descreve o comportamento da corrente ou da tensão, incluindo as respostas subamortecida, criticamente amortecida e superamortecida, dependendo da relação entre os valores de R, L e C

4 METODOLOGIA

4.1 MÉTODOS UTILIZADOS PARA OBTENÇÃO DE EQUAÇÕES

A metodologia utilizada para a realização da pesquisa incluiu etapas, como identificar as variáveis e constantes do problema; aplicar os conceitos físicos e a linguagem matemática dos circuitos elétricos para formar edos com base nas informações coletadas do problema em estudo; descrever a EDO correspondente; criar condições problemáticas; resolver EDOs aplicando métodos para obter uma solução geral; aplicar condições para determinar uma solução específica; expressar uma dada solução e interpretar graficamente os resultados dos problemas.

5 ANÁLISE DE DADOS

As Equações Diferenciais Ordinárias são uma ótima ferramenta Matemática para descrever situações ou fenômenos reais, mas para que elas sejam realmente úteis precisamos saber como resolvê-las. Foram analisados os princípios teóricos vinculados às equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem, além da representação dos circuitos RL e RLC. Como o objetivo fundamental é aplicar esse estudo na resolução de Problemas desses circuitos, abordaremos um problema de circuito utilizando as equações que modelam esses circuitos elétricos e mostrando suas respectivas soluções.

Um resistor de 40 ohms e um indutor de 0,1 henry são conectados em série com uma fonte de tensão de 110 volts. Se originalmente não existe Corrente no circuito, determine a corrente ao longo do tempo?

Solução: Neste caso, $R=40\Omega$, $L = 0,1H$ e $E=110 V$. Aplicando estes valores na Equação que é a EDO que modela um circuito RL. Obtemos, a equação

Diferencial para este circuito em questão é:

$$0,1 \frac{di}{dt} + 40i = 1100$$

Escrevendo na forma canônica,

$$\frac{di}{dt} + 400i = 1100$$

Esta equação representa uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) linear de primeiro grau, cujos coeficientes são constantes, a qual pode ser solucionada através do método do fator integrante.

Assim, calcular inicialmente o fator integrante através da fórmula $I(x) = e^{\int p(x)dx}$ é possível obter resultados precisos. Temos, $I(t) = e^{\int 400dt} = e^{400t}$.

Ao multiplicar ambos os lados da equação por $I(t)$, obtemos

$$e^{400t} \cdot \frac{di}{dt} + e^{400t} \cdot 400i = 1100 \cdot e^{400t}$$

$$\frac{di}{dt} (ie^{400t}) = 1100e^{400t}$$

Integrando ambos os lados em relação a t, em $ie^{400t} = \int 1100e^{400t} dt$

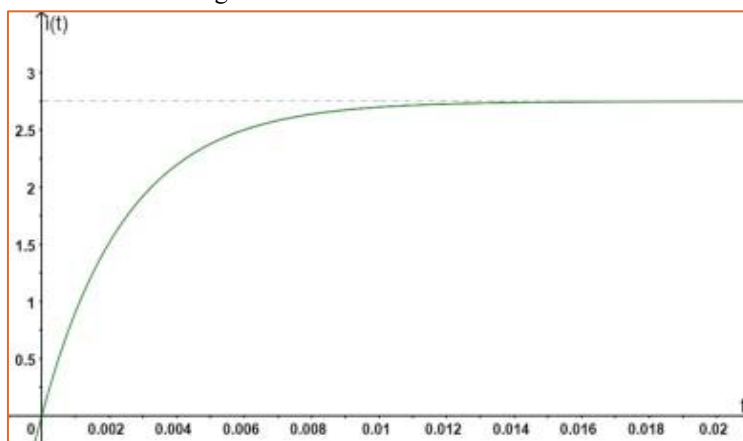
Assim: $ie^{400t} = 1100 \frac{e^{400t}}{400} + e$

Logo, a solução geral é $i(t) = 114 + Ce^{-400t}$

Considerando que no instante $t=0$ s a corrente é zero amperes, obtemos $0 = i(0) = \frac{11}{4} + c$, então $c = -\frac{11}{4}$, portanto, $i(t) = \frac{11}{4}(1 - e^{-400t})$

Observa-se que, à medida que o tempo avança, a corrente tende a convergir para seu valor assintótico, $i = 11/4 = 2,75$. Na figura, a função $i(t)$ é apresentada de forma gráfica.

Figura: Gráfico da corrente elétrica



Fonte: própria

Observe que em apenas 0.015s é obtida uma corrente de 2.74318 A, muito próxima do valor limite esperado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou uma breve revisão de equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem e seu uso na modelagem de aplicações de circuitos RL e RLC. Discutimos o contexto histórico, Definições de EDO e método de resolução como método do fator integral e coeficientes a serem determinados. Além disso, serão abordados os conceitos básicos de circuitos elétricos e as leis de Kirchoff, a aplicação destes conceitos à modelagem dos circuitos relevantes, com o objetivo de melhor compreendê-los.

A importância das EDOs está principalmente relacionada às suas aplicações, pois o estudo de muitos problemas da ciência e tecnologia pode ser reduzido para resolver tais equações. Assim, seu significado é significativo, pois podem ser utilizados para descrever processos, modelar e resolver problemas, bem como compreender e analisar fenômenos e vastas aplicações a diversas áreas do conhecimento com base no trabalho realizado ao mesmo tempo. Externamente, pode ser um estudo semelhante deve ser desenvolvido com base em aplicações de EDO na mesma área, mas em outros tipos de circuitos como RC e LC.

REFERÊNCIAS

GIL, Antônio Carlos. *Métodos e técnica de pesquisa social*. São Paulo: Atlas, 1999.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert. *Fundamentos de física: gravitação, ondas e termodinâmica*. v. 2. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2022.

JEWETT JUNIOR, John W.; SERWAY, Raymond A. *Física para cientistas e engenheiros*. v. 2. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

KREYSZIG, Erwin. *Matemática superior para a engenharia*. v. 1. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

NAGLE, Kent R.; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur D. *Equações diferenciais*. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

SANTOS, Cleber O. *Sistema de equações diferenciais lineares: aplicações*. Capivari de Baixo: Editora Univinte, 2022.

A INCLUSÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL: EPISTEMOLOGIA E IMPASSES NO ENSINO DA MATEMÁTICA

 Crossref  10.56238/livrosindi202535-030

Leonardo de Nazaré da Silva

E-mail: leonardo.nazare.silva@cameta.ufpa

Leandro Farias Ferreira

E-mail: leandro.ferreira@cameta.ufpa.br

Denivaldo Pantoja da Silva

E-mail: denivaldo@ufpa.br

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo compreender a epistemologia do termo inclusão, ou seja, os conceitos teóricos que ele evoca e uso prático da palavra. Para essa finalidade, foi analisado e assistido durante o Estágio Supervisionado 3 realizado em uma escola da rede pública de ensino, na modalidade Educação Especial/Inclusiva, nas turmas dos 8º anos do Ensino Fundamental, durante as aulas de Matemática. Através de uma fundamentação teórica centrada na teoria da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) de Lev Vygotsky, além da análise das leis que regulam essa área, podemos investigar como a inclusão tem sido compreendida e implementada nas escolas brasileiras. Também buscamos refletir sobre as práticas que observamos durante o estágio supervisionado e os desafios enfrentados no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Palavras-chave: Inclusão, Epistemologia, Ensino Fundamental, Educação Inclusiva, Políticas Educacionais.

1 INTRODUÇÃO

A palavra "inclusão" tem origem no latim, no verbo *includere*, que significa "colocar algo dentro" ou "entrar em um lugar fechado". Esse conceito destaca o ato de tornar acessível o que estava restrito. Dicionários como os de Aurélio e Houaiss reforçam essa definição etimológica, que reflete a ideia de abrir espaços antes limitados. Com o tempo, o termo evoluiu para representar o processo de integração e acessibilidade, especialmente em contextos educacionais e sociais.

Neste contexto, "inclusão" vai além de uma simples adaptação física ou técnica, exigindo uma reestruturação social e educacional que permita a verdadeira participação de todos, independentemente de suas características. De acordo com Mantoan (1997), a inclusão escolar implica criar espaços de aprendizado coletivo, promovendo adaptações que atendam às diversas necessidades e potencialidades dos alunos sem exclusão.

No contexto escolar, nas turmas acompanhadas durante uma disciplina de Estágio Supervisionada do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Pará, em uma escola da rede pública de ensino localizada na cidade de Cametá-PA, na modalidade Educação Especial/Inclusiva, nas turmas do 8º ano A e B, as práticas de ensino e de que forma elas impactavam os alunos com necessidades educacionais especiais no seu processo de construção do conhecimento matemático.

Durante essa etapa de observação, surgiram algumas dúvidas e questionamentos, tais como: como o conceito de inclusão é efetivamente praticado e compreendido no contexto de alunos com deficiência (PCD) inseridos em turmas regulares? Além disso, quais são as percepções de inclusão por parte dos professores e gestores no processo educacional em ambientes de ensino inclusivo? Este trabalho visa investigar como os conceitos de inclusão são aplicados na prática escolar, focando nas turmas do 8º ano do Ensino Fundamental em Educação Especial/Inclusiva. A pesquisa analisa as práticas dos profissionais, os desafios e as adaptações nas aulas de Matemática, com o objetivo de entender como a inclusão impacta o processo de ensino e aprendizagem no cotidiano das salas de aula.

O próximo trecho do artigo irá apresentar o referencial teórico, onde serão exploradas as principais abordagens sobre a epistemologia da inclusão e suas implicações no processo de ensino e aprendizagem. Esse referencial buscará fornecer uma base conceitual para entender os desafios e as práticas de ensino inclusivas, fundamental para a análise dos impasses que serão discutidos a seguir.

2 REFERENCIAS TEÓRICAS

A inclusão na educação brasileira tem recebido suporte significativo de legislações fundamentais, destacando-se a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996). Essa legislação estabelece princípios que promovem a igualdade de acesso e permanência na educação, reafirmando o direito de todos os alunos à educação de qualidade. Dessa forma, a LDB contribui para a construção de um sistema educacional mais inclusivo e acessível a todos, independentemente de suas condições sociais, culturais ou cognitivas.

Ademais, a Constituição Federal enfatiza que "a educação é um direito de todos e dever do Estado e da família" (BRASIL, 1998, Art. 205, pg 123), estabelecendo a base legal para práticas que visam a inclusão de estudantes com necessidades especiais e diversidade cultural nas escolas regulares.

Em nosso olhar ingênuo, para que a inclusão seja realmente eficaz, é necessário que haja uma implementação robusta dessas diretrizes nas práticas escolares. Um aspecto crucial é o papel da gestão escolar na promoção de um ambiente inclusivo. As escolas devem garantir que exista um suporte pedagógico adequado, como salas de recursos que ofereçam atendimento especializado e materiais adaptados que atendam às necessidades de todos os alunos.

O Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA, Lei nº 8.069/1990) é um marco fundamental que reforça o direito à educação para todos, sem discriminação, estabelecendo que é dever do Estado, da família e da sociedade garantir o acesso à educação de qualidade. Em seu artigo 4º, o ECA afirma que é dever de todos prevenir a ocorrência de ameaça ou violação dos direitos da criança e do adolescente, e em seu inciso II, destaca que é necessário assegurar a efetivação de seus direitos à educação, à cultura, ao esporte e ao lazer.

Além disso, o artigo 53 do ECA especifica que a criança e o adolescente têm direito à educação, que deve ser promovida e incentivada com a colaboração da sociedade e do Estado. O parágrafo 1º deste artigo ressalta que a educação deve ser oferecida em condições de igualdade e inclusão, buscando atender às necessidades e especificidades de cada indivíduo. O parágrafo 2º reforça que a educação deve ser de qualidade, permitindo o pleno desenvolvimento da personalidade e a preparação para o exercício da cidadania. Esses dispositivos legais formam uma base sólida para que as escolas adaptem suas práticas de ensino, garantindo que todos os estudantes, independentemente de suas condições individuais, tenham acesso a um aprendizado significativo e inclusivo.

Para captar a real essência da inclusão, é preciso ultrapassar a visão limitada de apenas integrar alunos com deficiência em classes regulares, buscando uma abordagem mais abrangente e dinâmica do processo de aprendizagem.

Segundo Vygotsky (1997):

(...) aquilo que é zona de desenvolvimento proximal hoje será o nível de desenvolvimento real amanhã – ou seja, aquilo que uma criança pode fazer com assistência hoje, ela será capaz de fazer sozinha amanhã (VIGOTSKY, 1997, p. 98).¹

No contexto educacional, a teoria de Lev Vygotsky sobre a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) torna-se um referencial teórico indispensável para fundamentar a discussão sobre inclusão escolar. Vygotsky (1997) postula que o aprendizado é inerentemente social e mediado por interações interpessoais. Segundo o autor, as capacidades cognitivas dos indivíduos se desenvolvem à medida que interagem com outras pessoas que possuem mais conhecimento ou habilidades, o que é fundamental para o processo de construção do conhecimento.

Diante desse referencial, este artigo examinará como o conceito de inclusão é efetivamente compreendido e implementado no contexto de alunos com deficiência (PCD) inseridos em aulas regulares. Ao centrar-se na teoria de Vygotsky, o estudo busca responder às perguntas e questionamentos apresentados.

3 METODOLOGIA

Esta pesquisa desenvolveu uma abordagem qualitativa, buscando compreender as percepções e experiências relacionadas à inclusão e aos impasses no processo de ensino e aprendizagem de matemática. O estudo foi estruturado em duas etapas principais: a aplicação de questionários e a observação em contexto de estágio.

A primeira etapa consistiu na aplicação de questionários semiestruturados com 20 perguntas aos participantes, incluindo professoras de matemática e gestores da escola campo de estágio. Os questionários foram elaborados para coletar informações sobre as percepções dos participantes a respeito da inclusão, suas experiências e os desafios enfrentados no contexto educacional. Antes da aplicação, foi lido e assinado um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), garantindo a confidencialidade e o anonimato dos dados fornecidos.

Para coleta de dados, foi utilizado entrevista do tipo aberta, gravada em áudio, os questionamentos abordaram questões sobre: as práticas de ensino utilizadas no contexto da inclusão; as dificuldades e desafios percebidos no processo de ensino e aprendizagem inclusivo nas aulas de matemática; a percepção dos professores e alunos em relação aos avanços e impasses na implementação da inclusão.

A segunda etapa do estudo consistiu na observação direta em sala de aula durante o estágio supervisionado, com o objetivo de identificar práticas de ensino inclusivas e documentar as interações entre professores e alunos, além dos desafios enfrentados. As observações foram registradas em diário de campo e complementaram os dados dos questionários, proporcionando uma análise mais detalhada sobre a aplicação e os desafios do ensino inclusivo.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A docente participante desta pesquisa é licenciada em Matemática e possui especialização em Ensino de Matemática. Atua na escola, campo de estágio, há seis anos e leciona profissionalmente desde 2010. Na instituição, a docente é responsável pelas turmas de 8º e 9º anos, sendo que as turmas de 8º ano são inclusivas e atendem estudantes

com Transtorno do Espectro Autista (TEA), deficiência intelectual leve e dislexia. Sua prática de ensino envolve, portanto, estratégias de ensino adaptadas, visando promover o aprendizado de todos os alunos, levando em consideração as particularidades individuais daqueles com necessidades educacionais especiais. A coordenação destacou a importância de um acompanhamento contínuo e de estratégias personalizadas para atender as necessidades individuais dos alunos. Foram discutidas as dificuldades enfrentadas pela equipe pedagógica, especialmente na ausência da professora auxiliar, que é vista como essencial para o sucesso do ensino inclusivo. A coordenação reconheceu que, apesar das limitações de recursos e do volume de alunos, há um esforço significativo em adaptar as atividades e avaliar os alunos de forma justa.

Cada aluno com necessidades educacionais especiais comprovada por laudo conta com o acompanhamento de um professor auxiliar, cuja função é oferecer suporte educacional no desenvolvimento de atividades. Esse apoio individualizado visa atender às especificidades de cada estudante, promovendo um ambiente de aprendizagem mais inclusivo, como garantido pela legislação brasileira, especialmente pela Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Lei nº 13.146/2015) e pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/1996). Essas normas asseguram o direito a um sistema educacional inclusivo e ao fornecimento dos recursos humanos e materiais necessários para o pleno desenvolvimento e participação dos alunos com deficiência no contexto escolar.

Em uma das turmas observadas, um aluno com deficiência intelectual leve utiliza um livro didático do 2º ano do ensino fundamental, em vez de um livro destinado ao 8º ano. Essa adaptação visa ajustar o material ao nível de compreensão e desenvolvimento cognitivo do aluno, tornando os conteúdos mais acessíveis e compatíveis com sua capacidade de entendimento. Ao utilizar o livro do 2º ano, o aluno pode aprender de forma mais gradual e concreta, respeitando seu ritmo de aprendizado e favorecendo seu engajamento nas atividades escolares.

Figura 1: Livro didático utilizado pelo aluno da inclusão



Fonte: autoral

Figura 2: Livro didático utilizado pelas turmas do 8º ano.



Fonte: autoral

Essas observações também se refletem nas avaliações (conforme ilustrado nas Figuras 3 e 4). Na Figura 3, apresenta-se a prova do aluno com TEA que é idêntica à aplicada aos demais alunos da turma. Por outro lado, na Figura 4, observa-se a prova do aluno com deficiência intelectual, na qual o nível de complexidade dos conteúdos abordados é significativamente reduzido.

Figura 3: Prova do aluno com transtorno do espectro autista (TEA)

AVALIAÇÃO SEMI-ANUAL DE MATEMÁTICA

01	(A)	(B)	(C)	(D)	06	(A)	(B)	(C)	(D)
02	(A)	(B)	(C)	(D)	07	(A)	(B)	(C)	(D)
03	(A)	(B)	(C)	(D)	08	(A)	(B)	(C)	(D)
04	(A)	(B)	(C)	(D)	09	(A)	(B)	(C)	(D)
05	(A)	(B)	(C)	(D)	10	(A)	(B)	(C)	(D)

QUESTÕES OBJETIVAS (10,0 Pts)

1. (0,3 PTS) - Das afirmativas abaixo, assinale a opção que as classifica corretamente em verdadeiras (V) ou falsas (F).
 I) - Todo número natural, também é um número racional.
 II) - Números racionais não podem ser escritos na forma de fração.
 III) - Existem números que são inteiros, mas, não são naturais, ainda que sejam racionais.
 (A) F, F, V
 (B) V, F, V
 (C) V, V, V
 (D) V, F, F

2. (0,3 PTS) - O valor da expressão $4 \cdot (0,6)^2$ é:
 (A) 0,1
 (B) 10
 (C) 1
 (D) 100

3. (0,3 PTS) - A soma da raiz quadrada de 81 com a raiz cúbica de 64 é:
 (A) 25
 (B) 17
 (C) 15

4. (0,3 PTS) - Ao transformar a dízima periódica 0,181818... na fração geratriz irredutível, encontramos:
 (A) $\frac{11}{60}$
 (B) $\frac{11}{20}$
 (C) $\frac{5}{21}$
 (D) $\frac{11}{25}$

5. (0,3 PTS) - Em uma aula de Matemática, a professora apresentou aos alunos uma reta numérica como a da figura a seguir.

A professora marcou o número $\frac{11}{4}$ nessa reta. Esse número foi marcado entre que pontos da reta numérica?
 (A) -4 e -3
 (B) -3 e -2
 (C) 2 e 3
 (D) 3 e 4

Fonte: autoral

Figura 4: Prova do aluno com deficiência intelectual

Sistema monetário

01	(A)	(B)	(C)	(D)	06	(A)	(B)	(C)	(D)
02	(A)	(B)	(C)	(D)	07	(A)	(B)	(C)	(D)
03	(A)	(B)	(C)	(D)	08	(A)	(B)	(C)	(D)
04	(A)	(B)	(C)	(D)	09	(A)	(B)	(C)	(D)
05	(A)	(B)	(C)	(D)	10	(A)	(B)	(C)	(D)

QUESTÕES OBJETIVAS (10,0 Pts)

1. (0,3 PTS) - Das afirmativas abaixo, assinale a opção que as classifica corretamente em verdadeiras (V) ou falsas (F).
 I) - Todo número natural, também é um número racional.
 II) - Números racionais não podem ser escritos na forma de fração.
 III) - Existem números que são inteiros, mas, não são naturais, ainda que sejam racionais.
 (A) F, F, V
 (B) V, F, V
 (C) V, V, V
 (D) V, F, F

2. (0,3 PTS) - O valor da expressão $4 \cdot (0,6)^2$ é:
 (A) 0,1
 (B) 10
 (C) 1
 (D) 100

3. (0,3 PTS) - A soma da raiz quadrada de 81 com a raiz cúbica de 64 é:
 (A) 25
 (B) 17
 (C) 15

4. (0,3 PTS) - Ao transformar a dízima periódica 0,181818... na fração geratriz irredutível, encontramos:
 (A) $\frac{11}{60}$
 (B) $\frac{11}{20}$
 (C) $\frac{5}{21}$
 (D) $\frac{11}{25}$

5. (0,3 PTS) - Em uma aula de Matemática, a professora apresentou aos alunos uma reta numérica como a da figura a seguir.

A professora marcou o número $\frac{11}{4}$ nessa reta. Esse número foi marcado entre que pontos da reta numérica?
 (A) -4 e -3
 (B) -3 e -2
 (C) 2 e 3
 (D) 3 e 4

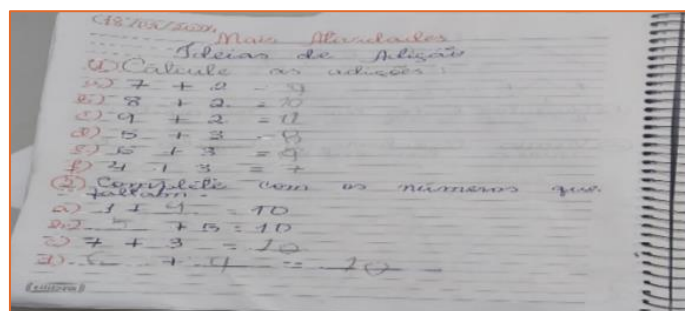
fonte: autoral

Esse contraste entre as duas avaliações evidencia a necessidade de adaptações diferenciadas, de acordo com as características e necessidades específicas de cada aluno. Enquanto o aluno com TEA pode ter um desempenho adequado dentro dos mesmos parâmetros de complexidade, o aluno com deficiência intelectual necessita de ajustes mais profundos para garantir que a avaliação seja efetiva e justa. A ZDP é o espaço entre o que o aluno já consegue fazer de forma independente e o que ele pode realizar com a ajuda de um adulto ou de um colega mais capacitado (Vygotsky, 1997). No caso do aluno com deficiência intelectual leve, a utilização de um livro didático do 2º ano do ensino fundamental e a adaptação das provas e atividades são um reflexo da necessidade de ajustes para manter o aluno dentro de sua ZDP. A professora titular, com o apoio da professora auxiliar, tenta identificar esse espaço de aprendizagem e proporcionar as condições necessárias para que o

aluno possa progredir, realizando atividades que, embora mais simples, possibilitam que ele avance de maneira gradual. Nesse contexto, a figura da professora auxiliar se torna fundamental. Ela desempenha um papel crucial na identificação das necessidades individuais de cada aluno, colaborando com o professor titular para ajustar as avaliações e estratégias de ensino de maneira que atendam às particularidades de cada aluno. Além disso, a professora auxiliar pode atuar diretamente no apoio ao aluno durante a avaliação, ajudando a mediar a compreensão das questões, orientando na organização do tempo e oferecendo o suporte necessário para que o aluno com deficiência intelectual tenha condições de demonstrar seu aprendizado de forma equitativa.

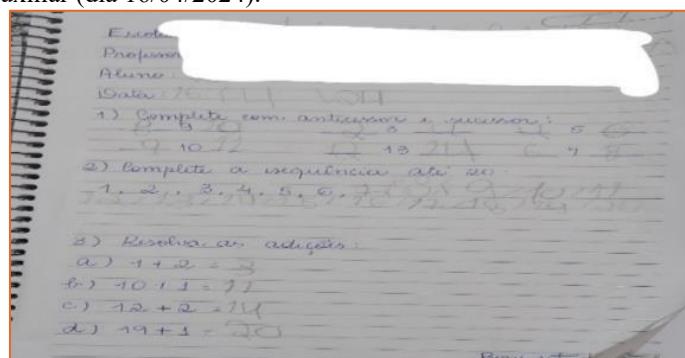
No entanto, nos dias em que a professora auxiliar do aluno com deficiência intelectual se ausentava por motivos externos, a professora titular da turma demonstrou certa dificuldade em reger a aula para turma e desenvolver simultaneamente uma atividade paralela para o aluno da inclusão. Nessas ocasiões, a professora recorria com frequência a atividades previamente aplicadas ou a exercícios do livro didático, como exercícios de soma e subtração e sequência numérica como forma de adaptar o conteúdo para o aluno, sem, no entanto, conseguir promover uma abordagem completamente personalizada e eficiente para suas necessidades específicas (como ilustrado nas figuras 5 e 6).

Figura 5: Atividade de soma e subtração utilizada para o aluno com deficiência intelectual na ausência da professora auxiliar (dia 18/04/2024).



Fonte: autoral

Figura 6: Exercício de sequência numérica aplicado como adaptação do conteúdo para o aluno com deficiência intelectual na ausência da professora auxiliar (dia 16/04/2024).



Fonte: autoral

A análise das atividades aplicadas ao aluno com deficiência intelectual, ilustradas nas Figuras 5 e 6, revela a importância das adaptações personalizadas no processo de ensino inclusivo. Conforme relatado na entrevista com a professora titular, a ausência da professora auxiliar cria um desafio significativo para o desenvolvimento de atividades paralelas que atendam às necessidades do aluno PCD, evidenciando a dificuldade de manter uma abordagem inclusiva eficaz em tais circunstâncias.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conclui-se que o conceito de inclusão, embora presente nas políticas educacionais, enfrenta desafios práticos em sua efetivação, especialmente no contexto de alunos com deficiência (PCD) inseridos em turmas regulares. A prática inclusiva verdadeira exige mais do que adaptações pontuais: é necessário um apoio contínuo, com a presença de professores auxiliares, para que o professor titular possa atender de maneira eficaz a toda a turma, incluindo alunos com necessidades educacionais específicas. Além disso, a percepção de inclusão por parte dos professores e gestores revela a importância de recursos adequados e formação docente voltada para a criação de atividades adaptadas que respeitem o ritmo e as capacidades individuais dos alunos, promovendo o aprendizado dentro de sua Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP).

Este estudo destaca que a inclusão efetiva depende de um compromisso estrutural e de investimentos em formação e apoio ao professor, fundamentais para construir um ambiente educacional realmente inclusivo, onde todos os alunos possam se desenvolver e enfrentar desafios mais complexos no futuro.

REFERÊNCIAS

BRASIL. *Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996*. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. *Diário Oficial da União: seção 1*, Brasília, DF, p. 27833, 23 dez. 1996. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm. Acesso em: 17 jul. 2025.

BRASIL. *Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva*. Brasília, DF: MEC/SEESP, 2008. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/politica.pdf>. Acesso em: 17 jul. 2025.

BRASIL. *Lei nº 13.146, de 6 de julho de 2015*. Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência). *Diário Oficial da União: seção 1*, Brasília, DF, p. 2, 7 jul. 2015. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2015/lei/113146.htm. Acesso em: 17 jul. 2025.

BRASIL. *Constituição (1988)*. Constituição da República Federativa do Brasil. Brasília, DF: Senado Federal, 1988. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acesso em: 17 jul. 2025.

BRASIL. *Lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990*. Dispõe sobre o Estatuto da Criança e do Adolescente e dá outras providências. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 16 jul. 1990. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/18069.htm. Acesso em: 17 jul. 2025.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. Tradução de Anna Maria Carvalho. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1997.

MANTOAN, Maria Teresa Eglér. *Inclusão escolar: o que é? Por quê? Como fazer?* São Paulo: Moderna, 1997.

INICIAÇÃO À PROGRAMAÇÃO EM PYTHON APLICADO EM OBJETOS DE CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS: RELATO DAS EXPERIÊNCIAS VIVENCIADAS

  10.56238/livrosindi202535-031

Jamili Nunes dos Prazeres

E-mail: jamilinunes4@gmail.com

Mateus Rodrigues das Neves

E-mail: mateusdasneves555@gmail.com

Dalmi Gama dos Santos

E-mail: dalmi@ufpa.br

RESUMO

A linguagem Python é uma ferramenta que tem importância para se ensinar matemática, por ser uma linguagem simples e de fácil aprendizagem, além possuir uma vasta gama de bibliotecas que facilitam cálculos complexos e visualizações de dados. Desse modo, o trabalho tem como objetivo apresentar a linguagem Python como uma metodologia de ensino para auxiliar alunos e professores no ensino e aprendizagem da matemática. Além de levar, através de oficinas, a inclusão da tecnologia digital para alunos da educação básica, proporcionando novas experiências de aprendizagem com o uso da programação computacional. O seguinte trabalho traz uma abordagem sobre o relato de experiência vivenciada no Programa Institucional de Bolsa de extensão-PIBEX, onde por meio do projeto desenvolvemos uma oficina denominada “Python aplicado no cálculo de volume de figuras geométricas espaciais” realizada na EEEM Benedita Marilda da Silva Braga localizada na cidade de Mocajuba. A pesquisa é de caráter qualitativo e exploratório e a motivação da pesquisa se deu por meio das oficinas aplicadas durante o programa. Desse modo, podemos inferir que a inserção da tecnologia nas escolas como metodologia de ensino pode contribuir no ensino e aprendizagem dos alunos de forma significativa. E que a linguagem Python pode ser uma grande aliada nas aulas de matemática, proporcionando a alunos e professores novos caminhos e metodologias, que possibilitam novas metodologias para ensinar matemática.

Palavras-chave: Programação em Python, Ensino e Aprendizagem em matemática, Metodologia diversificada, Matemática.

1 INTRODUÇÃO

Atualmente vivenciamos o marco do avanço tecnológico, evento que ocorre instantaneamente. A tecnologia passou a desempenhar um papel de grande importância na sociedade atual, oferecendo inúmeras oportunidades e abrindo novos caminhos tanto na comunicação quanto na saúde, na produtividade, no esporte, no entretenimento, entre outros. Dessa forma, ela também tem grande influência na educação, aproximando a rotina escolar da realidade fora da escola. Além de oferecer uma vasta gama de recursos que podem ajudar no aprendizado, cativando a atenção dos alunos, tornando as aulas mais dinâmicas e acessíveis.

Nesse sentido foi desenvolvido o projeto “Iniciação à Programação em Python: Inserindo alunos da Rede Municipal o Ambiente Matemático Computacional através de uma Linguagem de Programação Livre”, o qual tem como objetivo principal levar a imersão das tecnologias digitais para as escolas da rede básica de ensino, de acordo com a BNCC

Há que se considerar, ainda, que acultura digital te promovido mudanças sociais significativas nas sociedades contemporâneas. Em decorrência do avanço e da multiplicação das tecnologias de informação e comunicação e do crescente acesso a elas pelas maiores disponibilidades de computadores, telefones celulares, tablets e afins, os estudantes estão dinamicamente inseridos nessa cultura, não somente como consumidores. (BRASIL, 2010)

A Linguagem Python é conhecida por ser uma linguagem simples, eficiente e de fácil aprendizagem, ideal para iniciantes. Possui também uma sintaxe clara e bibliotecas que permitem a visualização de dados e gráficos e a realização de cálculos simples e complexos, permitindo que usuários criem uma variedade de aplicações e desenvolvam softwares, jogos e muito mais. O Python foi criado em 1990 por Guido van Rossum, no Instituto Nacional de Pesquisa para Matemática e Ciência da Computação da Holanda (CWI), e tinha originalmente foco em usuários como físicos e engenheiros. O Python foi concebido a partir de outra linguagem existente na época, chamada ABC (BORGES, 2014).

A matemática costuma ser a matéria com menos favoritismo de grande parte dos alunos nas escolas, afinal é uma matéria que envolve cálculos, raciocínio lógico e requer muita atenção. A dificuldade na compreensão dos conteúdos gera certo desinteresse nos alunos, dificultando o ensino e aprendizagem da matemática. Desse modo, surge a procura por metodologias que possam instigar esses alunos ao aprendizado matemático, que possam desenvolver o raciocínio lógico de forma dinâmica.

Nesse sentido, a linguagem Python surge como uma ferramenta para auxiliar no ensino e aprendizagem da matemática através da programação computacional. O Python possui bibliotecas voltadas exclusivamente para cálculos matemáticos, criação e visualização de gráficos e etc. De acordo com Castillo e Sánches:

Uma biblioteca em Python é um conjunto de módulos e pacotes que contém funções, classes e variáveis pré-definidas, facilitando o desenvolvimento de software ao permitir que os programadores reutilizem código em vez de escrevê-lo do zero. Entre as bibliotecas úteis para operações matemáticas estão: NumPy, Math, Fractions, SymPy, Pylab, Matplotlib, Cmath. Essas bibliotecas tornam o Python uma linguagem poderosa para cálculos matemáticos e visualização de dados, desde problemas numéricos básicos até a resolução de equações simbólicas complexas (CASTILLO e SÁNCHEZ, 2023).

Desse modo, este trabalho tem por objetivo apresentar o Python como uma metodologia de ensino inovadora, adotada para ajudar no ensino e aprendizagem da matemática, tornando-o mais dinâmico e ajudando a levar a inclusão tecnológica para as escolas da rede básica de ensino.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Diante do atual contexto em que as tecnologias se fazem presentes no cotidiano, o uso de recursos tecnológicos, computadores, tablets e softwares podem vir a ser um grande aliado para o professor, conforme mostram os Parâmetros Curriculares Nacionais (2017):

Contudo, também é imprescindível que a escola compreenda e incorpore mais as novas linguagens e seus modos de funcionamento, desvendando possibilidades de comunicação (e também de manipulação), e que eduque para usos mais democráticos das tecnologias e para uma participação mais consciente na cultura digital. Ao aproveitar o potencial de comunicação do universo digital, a escola pode instituir novos modos de promover a aprendizagem, a interação e o compartilhamento de significados entre professores e estudantes. (BRASIL, 2017).

Para (SOUZA, 2020), a linguagem de programação Python é cada vez mais utilizada em diversos campos científicos e tecnológicos, devido à sua simplicidade e eficiência. Com uma sintaxe clara e legível, o Python permite que mesmo os iniciantes na programação possam criar programas e projetos complexos com facilidade. Ao aprender matemática com Python, os alunos estão se preparando para enfrentar os desafios de um mundo cada vez mais orientado pela tecnologia.

A autora enfatiza que o uso da linguagem de programação em Python contribui significativamente para o ensino da matemática, pois com o passar dos anos e o avanço das tecnologias o ensino da matemática vem sofrendo modificações ao ensinar determinado conteúdo em sala de aula. Pelo fato de ser uma linguagem clara e acessível, o Python se mostra como um novo método de ensino o qual está presente no cotidiano dos jovens pelo fato de ser um recurso tecnológico.

Partindo deste pressuposto, (Moraes, Basso e Fagundes, 2016.), colocam em ênfase que a programação é uma habilidade importante que deve ser ensinada na escola, pois ajuda os alunos a desenvolverem habilidades de resolução de problemas de forma lógica e analítica, ampliando o raciocínio lógico, que são úteis em muitas outras áreas da vida, como o mercado de trabalho. A maioria das profissões atualmente exige algum conhecimento de programação, habilidades valorizadas pelos empregadores, podendo abrir muitas portas para as carreiras dos alunos, como desenvolvimento de software, engenharia de software, design de jogos e muito mais.

3 DESENVOLVIMENTO

A tecnologia é uma ferramenta cada vez mais presente na sociedade e no mercado de trabalho e um recurso essencial no ensino, ajudando os alunos a perceber as ideias matemáticas, a raciocinar, a resolver problemas e a comunicar. Em uma entrevista dada ao canal do YouTube-Happy Code5, o Professor Doutor da UNICAMP, Marcos Augusto Francisco Borges, acredita na importância de ensinar programação para crianças e jovens:

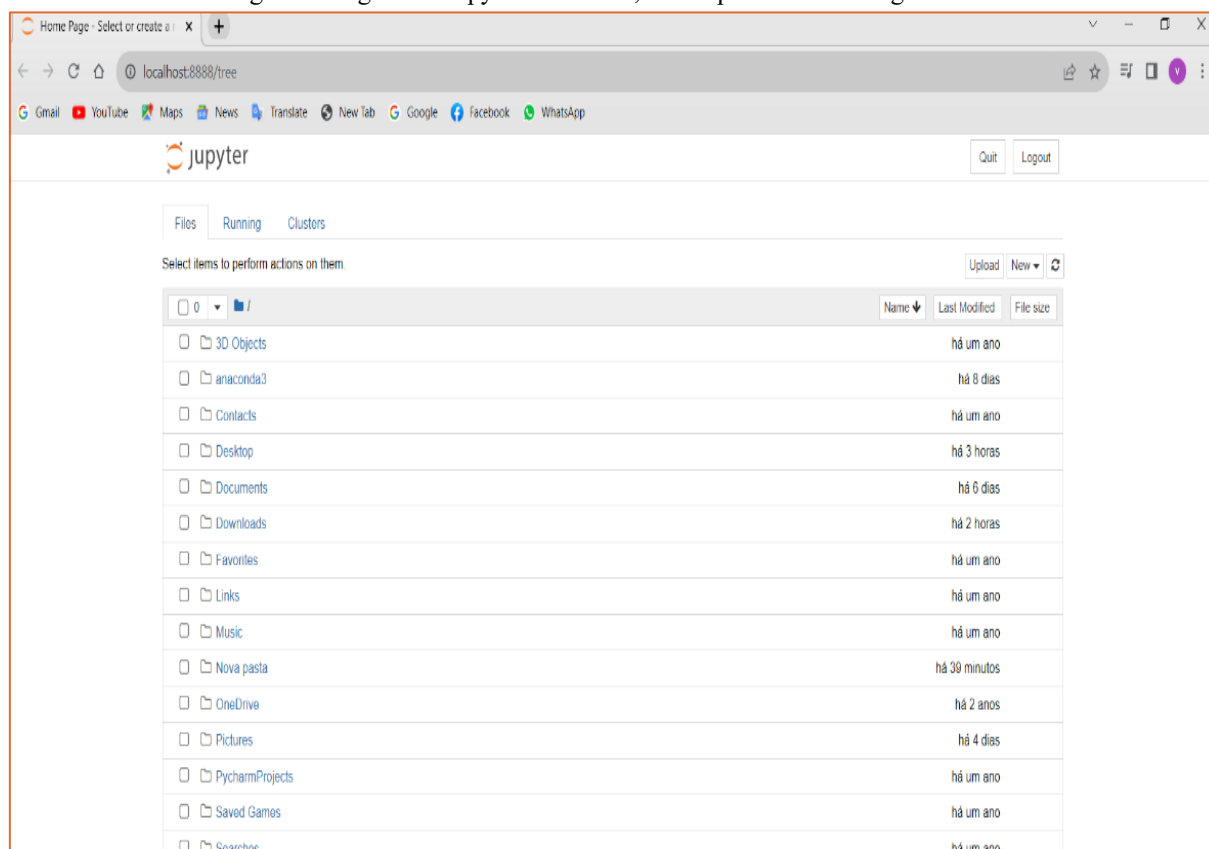
“É muito importante ensinarmos nossas crianças e jovens a programar, não porque a gente quer que todos eles virem profissionais de informática, mas porque já está provado que uma criança que aprende a programar, aprende a pensar, aprende a resolver problemas mais complexos, aprende a dividir um problema grande em problemas menores, aprende a persistir para chegar em alguma coisa, é uma habilidade que prepara uma criança para no futuro ser um profissional excelente em qualquer área que ele vá atuar.” (BORGES, 2018).

Nesse sentido, o projeto “Iniciação à Programação em Python: Inserindo alunos da Rede Municipal o Ambiente Matemático Computacional através de uma Linguagem de Programação Livre”, foi desenvolvido com o objetivo de instigar alunos da rede básica de ensino ao aprendizado matemático através da linguagem de programação.

Para a implementação dessas tecnologias digitais relacionadas à programação computacional nas escolas da rede básica de ensino, são realizadas oficinas que trabalham conceitos básicos de programação e a relacionam ao ensino-aprendizagem da matemática. Desse modo, a primeira oficina do projeto para o segundo semestre do ano de 2024, foi realizada na EEEM Benedita Marilda da Silva Braga, localizada na cidade de Mocajuba-PA. A escolha da escola deu-se ao fato de ser uma das poucas escolas do município que possuía laboratório de informática com capacidade para receber o projeto.

Assim, no dia 13 de setembro, foi realizada a aplicação da oficina com 25 alunos da turma do 3º ano da escola. A escolha da turma/série para a aplicação da oficina partiu da direção da escola, a qual priorizou os alunos que iriam realizar a prova do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Então, foi feita a escolha do conteúdo matemático, assim, oficina seguiu o tema: “Python aplicado no cálculo de volume de figuras geométricas espaciais”. A oficina foi dividida em três etapas. Na primeira, foi apresentado o projeto e seus objetivos. Foi feita uma introdução à linguagem Python, explicando conceitos básicos de programação, como variáveis e condicionais. Além de apresentar sua sintaxe básica por meio de exemplos práticos. Foi mostrado o passo a passo da instalação do Pacote Anaconda, no qual já está contido o Jupyter Notebook, uma aplicação em código aberto que permite que você crie e compartilhe documentos com códigos, equações, visualizações e textos aplicativos.

Figura 1: Página do Jupyter Notebook, onde aparecem os códigos salvos



Fonte: os autores

Na segunda etapa, foi feita uma introdução à Geometria Espacial e ao cálculo de volume de figuras geométricas espaciais, mostrando os modelos que usamos na geometria espacial para o cálculo de volume, área lateral, área da base e área total dessas figuras. Na terceira etapa, foi realizada a aplicação, onde os alunos realizaram o cálculo de volume, utilizando os códigos em Python.

Para realizar a atividade utilizamos a biblioteca *math*, que permite realizar cálculos complexos de forma simples e direta; a função *math.sqrt()* que retorna a raiz quadrada de um número; variáveis do tipo *float*, que armazena valores reais ou flutuantes, que contém casas decimais e *int*, que armazena valores inteiros, sem casas decimais.

Ao final da aplicação é passado um questionário com doze perguntas para a coleta de dados quantitativos, nele os alunos respondem perguntas sobre suas experiências no uso da linguagem de programação e como ela pode ajudar no ensino e aprendizagem da matemática.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A oficina intitulada “Python aplicado no cálculo de volume de figuras geométricas espaciais” desenvolvida por meio do projeto de extensão intitulado “Iniciação à Programação em Python: Inserindo alunos da Rede Municipal o Ambiente Matemático Computacional através de uma Linguagem de Programação Livre” proporcionou aos alunos da escola EEEM Benedita Marilda da Silva Braga uma experiência única, como relatado por dois alunos em resposta à pergunta 8, fez-se a seguinte pergunta “Como foi sua experiência com a linguagem de programação Python?”.

- **Aluna 1:** “foi algo novo para mim, porque nunca tive contato antes com a linguagem de programação”.
- **Aluno 2:** “eu gostei bastante porque o python é uma ferramenta que torna o ensino da matemática diferente e mais dinâmico”.
- **Aluno 3:** “foi uma experiência incrível, uma coisa nova para mim, não imaginava que daria para aprender matemática com linguagem de programação”.

Foi possível observar ainda a empolgação dos alunos na resolução dos exercícios, e a curiosidade em saber como funciona a linguagem Python e como se pode resolver esses exercícios. Alguns alunos relataram a importância do uso das tecnologias no ensino e aprendizagem da matemática e afirmaram uma melhor compreensão do conteúdo trabalhado na aula.

Portanto, por meio da coleta dos dados é possível inferir que é de suma importância o uso de novas metodologias de ensino nas aulas de matemática, bem como, o uso das tecnologias digitais a favor do aprendizado matemático, desenvolvendo o raciocínio lógico e preparando nossos alunos para o mundo tecnológico.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O projeto “Python aplicado no cálculo de volume de figuras geométricas espaciais” desenvolvida através da oficina do projeto “Iniciação à Programação em Python: Inserindo alunos da Rede Municipal o Ambiente Matemático Computacional através de uma Linguagem de Programação Livre” objetiva a inserção das tecnologias nas escolas do ensino básico, destacando a importância do uso dessas tecnologias no ensino e aprendizagem da matemática. Ressalta também o desenvolvimento de novas metodologias que possam ajudar no desenvolvimento cognitivo e raciocínio lógico dos alunos, melhorando seu desempenho matemático, despertando o interesse na hora de aprender matemática.

Este artigo enfatiza o uso da Linguagem de Programação Python como ferramenta metodológica para ajudar no ensino-aprendizagem da matemática nas escolas da rede municipal, promovendo a inclusão tecnológica dos alunos da rede básica de ensino por meio da linguagem computacional. Contudo, a expectativa é de que esse projeto possa ajudar os alunos na aprendizagem matemática, melhorando o desempenho na matéria. Além de despertar o interesse pelo aprendizado computacional e por novas ferramentas tecnológicas que possam lhes proporcionar um bom desenvolvimento matemático e lhes preparar para o mundo tecnológico.

REFERÊNCIAS

- BORGES, Luiz Eduardo. *Python para desenvolvedores*. 1. ed. São Paulo: Novatec Editora, 2014. 286 p.
- BORGES, M. A. F. Importância da programação para crianças. [S.l.]: YouTube, 2018. Disponível em: <https://youtu.be/aCzFPKeBGfs?si=GW-t64yFH8D9vRsR>. Acesso em: 26 out. 2024.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: MEC, 1997.
- CASTILLO, Luís Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne C. Uso de Python no ensino de matemática: PyGGB e Manim. *RETEM – Revista Tocantinense de Educação Matemática*, Arraias, v. 1, p. e23006, 2023. Disponível em: <https://ojs.sbemto.org/index.php/ReTEM/article/view/163>. Acesso em: 28 out. 2024.
- MORAIS, A. D.; BASSO, M. V. A.; FAGUNDES, L. C. Educação matemática & ciência da computação na escola: aprender a programar fomenta a aprendizagem de matemática? *Ciênc. Educ.*, Bauru, v. 23, n. 2, p. 455–473, mai./set. 2016.
- SOUZA, T. T. *Uma breve introdução à linguagem Python para professores de matemática*. 2020. 33 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática – Licenciatura) – Instituto UFC Virtual, Universidade Federal do Ceará, Caucaia, 2020. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/68976>. Acesso em: 27 out. 2024.

GEOMETRIAS: UMA ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA DO 2º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

  10.56238/livrosindi202535-032

Jânio Marcelo Castro Amaro Júnior

E-mail: janio.marcelo@cameta.ufpa.br

Ademar Pinheiro Farias Júnior

E-mail: junyor.faryas@gmail.com

Denivaldo Pantoja da Silva

E-mail: denivaldopantoja@gmail.com

RESUMO

O presente artigo relata a análise, realizada a partir do livro didático de matemática do 2º ano do Ensino Fundamental, onde se observou a abordagem e disposição do conteúdo da geometria. Identificou-se um conjunto de atividades de caráter introdutório deste conteúdo, que parte de situações vivenciadas nas experiências dos alunos. Nas atividades é possível de explorar diversos conceitos geométricos, desde o reconhecimento das figuras geométricas (planas e espaciais). Compreendendo que a geometria está presente em diversas situações do cotidiano e que é possível associá-la aos elementos dos conteúdos trabalhados em sala de aula. Por fim, através da análise verificou-se que os alunos devem apresentar certo conhecimento prévio da geometria. Contudo, buscou-se, analisar de forma conceitual mediante os referenciais teóricos, apresentado elementos e conceitos, que se reflitam em aprendizagens significativas.

Palavras-chave: Análise de Livro Didático, 2º Ano do Ensino Fundamental, Geometrias.

1 INTRODUÇÃO

Desde os primórdios da história, a geometria tem desempenhado um papel fundamental na compreensão e na organização do nosso mundo. As concepções geométricas estão presentes em diversos aspectos do cotidiano, desde as formas naturais da paisagem até as estruturas arquitetônicas e as expressões artísticas. A geometria não se limita ao campo da matemática, mas se entrelaça com outras áreas do conhecimento, refletindo a importância dessa ciência para a formação de uma compreensão mais holística e integrada do ambiente ao nosso redor. A inserção da geometria no currículo escolar, especialmente nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, é crucial para o desenvolvimento das habilidades espaciais e do raciocínio lógico dos alunos.

Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a geometria assume um papel basilar na formação educacional. Ela não apenas introduz os alunos ao estudo das formas e das suas propriedades, mas também serve como uma ponte para o aprendizado de outros conceitos matemáticos e científicos. A compreensão da geometria envolve a capacidade de reconhecer, analisar e manipular formas e espaços, o que contribui significativamente para o

desenvolvimento da percepção espacial e da linguagem matemática. A interação entre a geometria e outros conteúdos matemáticos, como números e álgebra, é essencial para construir uma base sólida para o aprendizado contínuo ao longo da trajetória escolar.

A geometria é frequentemente definida como a ciência do espaço, preocupada com a representação e medição de formas. Essa definição destaca a importância da geometria na formação das percepções espaciais e visuais dos alunos, além de promover o desenvolvimento de conceitos fundamentais relacionados à organização e ordenação de formas. A aprendizagem da geometria nos Anos Iniciais deve, portanto, proporcionar aos alunos oportunidades para explorar e compreender as relações entre diferentes formas, tanto planas quanto espaciais. É nesse contexto que a abordagem da geometria deve ser integrada com outras áreas do conhecimento, favorecendo uma compreensão mais ampla e contextualizada. A análise de um livro didático voltado para o 2º ano do Ensino Fundamental pode oferecer uma visão valiosa sobre como a geometria é apresentada e abordada nas salas de aula. Através da observação e interpretação dos conteúdos e das atividades propostas, é possível avaliar como os conceitos geométricos são introduzidos e explorados, e como esses conceitos se conectam com a realidade cotidiana dos alunos. A investigação das atividades presentes no livro didático permite identificar as estratégias pedagógicas utilizadas para ensinar geometria e avaliar sua eficácia em promover o desenvolvimento das habilidades espaciais e do raciocínio geométrico.

A análise proposta neste trabalho baseia-se em referenciais teóricos como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Lindquist (1994) e Santos (2008). A BNCC oferece diretrizes e objetivos curriculares para o ensino da geometria, enquanto Lindquist e Santos fornecem insights sobre práticas pedagógicas e desafios no ensino da matemática. A partir desses referenciais, busca-se compreender como o livro didático aborda a geometria e como ele promove a integração dos conceitos geométricos com outras áreas da matemática e do conhecimento. Essa análise visa contribuir para a melhoria do ensino da geometria, oferecendo sugestões e reflexões que podem ser úteis para educadores e desenvolvedores de materiais didáticos.

A investigação do conteúdo geométrico no livro didático é, portanto, uma oportunidade para refletir sobre a prática pedagógica e as estratégias utilizadas para ensinar geometria de maneira eficaz. Através da análise das atividades e dos conteúdos apresentados, é possível identificar pontos fortes e áreas que necessitam de aprimoramento, contribuindo para o desenvolvimento de práticas educacionais que favoreçam a compreensão e a aplicação dos conceitos geométricos pelos alunos. Este trabalho, ao examinar a abordagem da geometria em

um livro didático específico, pretende fornecer uma visão crítica e construtiva sobre o ensino desse importante campo da matemática.

2 ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA DO 2º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Inicialmente, se realizou a identificação do livro, considerando o mesmo é uma obra coletiva da Editora moderna. O livro se destina ao 2º ano do ensino fundamental, foi publicado em 2017. Pertencente ao quadriênio de 2019 a 2022 do Plano Nacional do Livro Didático (PNLA). A segunda etapa observou-se os conteúdos distribuídos a partir do sumário, quais estão abordados: localização e movimento; números; adição e subtração; multiplicação; operação com números naturais; e geometria.

Dentre os conteúdos identificados no livro didático, optou-se em analisar os conteúdos de geometrias (plana e espacial). Os conteúdos de geometria estão agrupados em dois capítulos, sendo eles o quarto e o oitavo, respectivamente. O capítulo quatro, se inicia com a seguinte afirmação: Algumas figuras não são planas. A partir dessa afirmação os autores se proem um conjunto de atividades de reconhecimento das formas geométricas solidas. As atividades se utilizam de elementos do cotidiano dos alunos para associar um objeto à uma forma geométrica espacial, a exemplo: o chapéu de festa para identificar o cone, lata para se identificar o cilindro, e uma bola para identificar a esfera. As figuras a seguir revelam essas associações.

Figura 1: Associação ao cone.



Fonte: Obra Coletiva, Editora Moderna, matemática – 2º ano do ensino fundamental, p.80. 2017

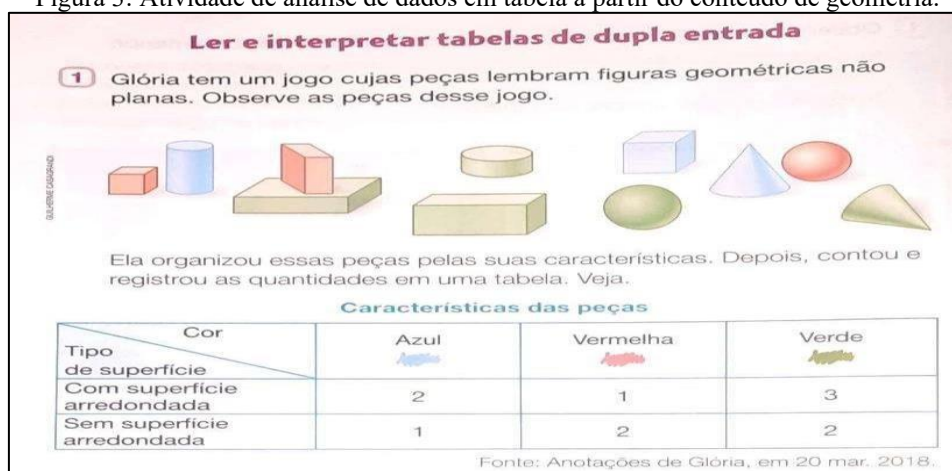
Figura 2: Associação ao cilindro e a esfera.



Fonte: Obra Coletiva, Editora Moderna, matemática – 2º ano do ensino fundamental, p.81. 2017

Na continuação do quarto capítulo, se dá início às apresentações das figuras planas. Novamente o conteúdo é abordado com questões que envolvem diferença e semelhança. Na conclusão do capítulo está disposto um jogo a partir das figuras geométricas espaciais, qual aborda outros conteúdos matemáticos, como: quantidade, diferença e semelhança das formas geométricas espaciais, e análise de dados mediante tabela.

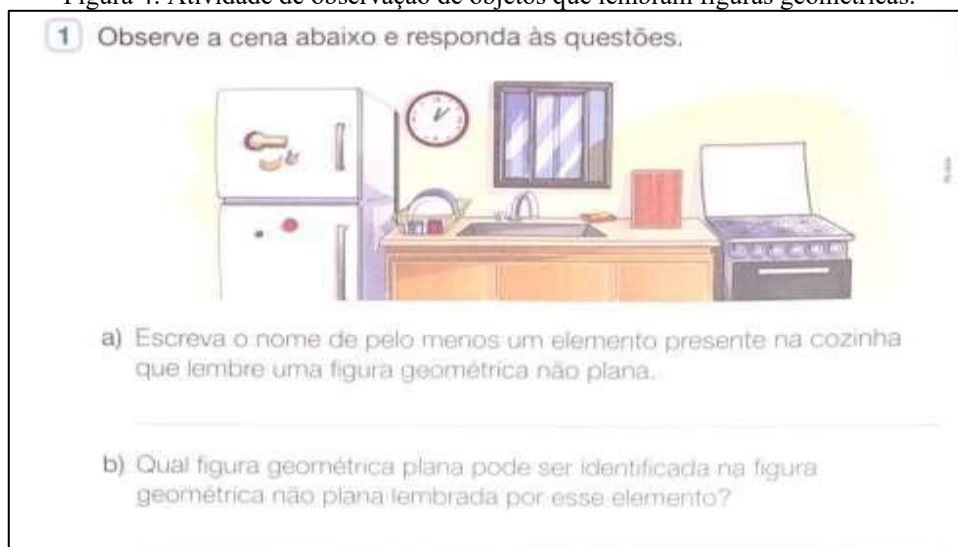
Figura 3: Atividade de análise de dados em tabela a partir do conteúdo de geometria.



Fonte: Obra Coletiva, Editora Moderna, matemática – 2º ano do ensino fundamental, p. 90. 2017.

O oitavo capítulo, que também aborda o conteúdo de geometria. Está intitulado conhecendo as figuras. O capítulo inicia apresentando uma atividade, que mostra uma imagem de uma cozinha, onde se pede para os alunos identificarem a partir dos utensílios domésticos algumas figuras geométricas espaciais, ou seja, objetos do cotidiano do aluno que lembram figuras geométricas.

Figura 4: Atividade de observação de objetos que lembram figuras geométricas.

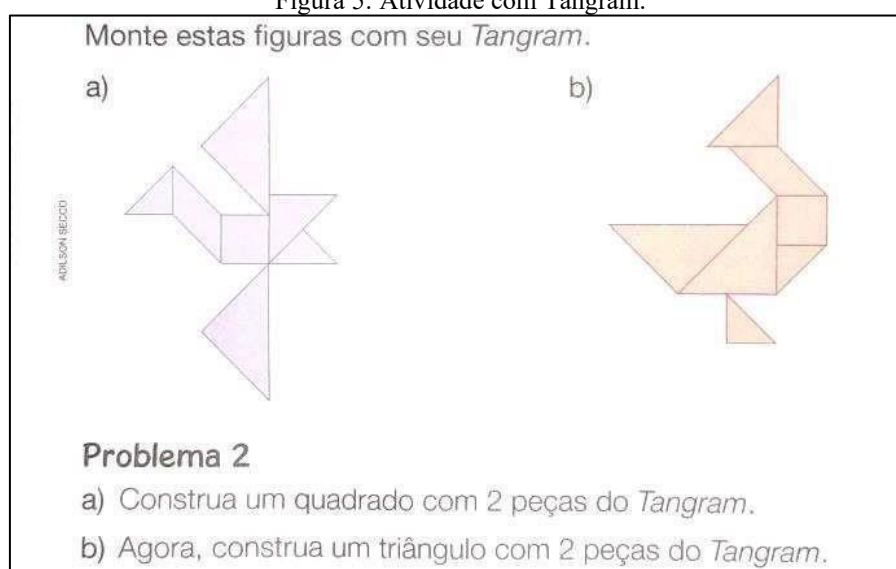


Fonte: Obra Coletiva, Editora Moderna, matemática – 2º ano do ensino fundamental, p. 168. 2017.

O capítulo continua, ao abordar o círculo e a esfera, se apresenta algumas atividades de sobre esses dois elementos, em uma das atividades está exposto num quadro uma menina segurando um pirulito circular, no quadro seguinte a menina movimentava o pirulito, onde se pode observar o pirulito como esférico.

Ainda se percebe, elementos de comparações entre as figuras planas: quadrado, retângulo, triângulo, círculo, etc. Na conclusão deste capítulo se pode observar uma atividade que emprega o jogo do Tangram, como recurso didático, para a construção do raciocínio lógico geométrico. A figura a seguir demonstra a atividade.

Figura 5: Atividade com Tangram.



Fonte: Obra Coletiva, Editora Moderna, matemática – 2º ano do ensino fundamental, p. 178. 2017.

Para tanto, Santos (2008), afirma que há um despreparo na maneira de como a Geometria é ensinada nas escolas e, portanto, se faz necessário uma nova perspectiva acerca do conteúdo, uma vez que merece maior atenção. Uma vez que a Geometria contribua para que o aluno, a partir de sua percepção do mundo ao seu redor, venha a compreender de forma organizada. Assim, o conteúdo pode contribuir para a formação e desenvolvimento do pensamento, identificando semelhanças e diferenças no seu cotidiano.

É nesse sentido que a Base Nacional Comum Curricular destaca a geometria para os anos iniciais do ensino fundamental:

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, o estudo da posição e deslocamentos no espaço e o das formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência.

No Ensino Fundamental – Anos Iniciais, espera-se que os alunos identifiquem e estabeleçam pontos de referência para a localização e o deslocamento de objetos, construam representações de espaços conhecidos e estimem distâncias, usando, como suporte, mapas, croquis e outras representações. Em relação às formas, espera-se que os alunos indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa. Espera-se, também, que nomeiem e comparem polígonos, por meio de propriedades relativas aos lados vértices e ângulos. O estudo [...] das simetrias deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano [...]. (Brasil, 2017, p. 227 e 228)

A Geometria está presente do cotidiano dos alunos, e seu ensino nas escolas, parte do preparo e do conhecimento deste conteúdo, assim como a compreensão de onde e como se empregada. Quando se referenciar a utilização de materiais manipulativos, um desenho, formas recortadas, formas solidas, tangram, ou outro modelo, servem como representação cognoscente, permitindo projetar mentalmente o objeto na sua ausência. Conforme Lindquist (1994, p. 77) “[...] materiais de manipulação fornecem oportunidades para raciocinar com objetos [...]” de usos diferentes, porem associáveis mediante suas semelhanças, que podem ser utilizados “[...] para ensinar a resolver problemas e ensinar para resolver problemas [...]”.

Vale destacar que as habilidades que os alunos deveram desenvolver segundo a BNCC a partir dos conteúdos de geometria no 2º ano do ensino fundamental são:

(EF02MA14) – Reconhecer, nomear e comparar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera), relacionando-as com objetos do mundo físico. (EF02MA15) – Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos. (Brasil, 2017, p. 239)

Assim os alunos necessitam desenvolver e recorrer à habilidade de visualização para executar diferentes processos mentais. Dessa forma, considera-se o cotidiano dos alunos, a partir de suas experiências e suas percepções acerca dos conteúdos os alunos possam desenvolver um olhar geométrico sobre a realidade, de modo a produzir, consolidar e apropriar-se em conceitos geométricos abstratos, sobretudo daqueles que são referentes ao objeto geométrico.

Portanto, é primordial possibilitar que os alunos realizem um conjunto de atividades experimentais e através de diferentes situações, que se relacionam a conceitos que serão utilizados em outros, e diferentes momentos no percurso de seus processos de aprendizagens. Ademais, a utilização de materiais didáticos e pedagógicos também são de muita importância para o ensino da Geometria. Com isto deve-se deixar evidente a cada aula qual a importância daquele conteúdo estudado para a vivência do aluno, esclarecendo as possibilidades de uso desses conhecimentos.

3 ANÁLISE E RESULTADOS

A análise do livro didático de matemática do 2º ano do Ensino Fundamental, publicado pela Editora Moderna, evidencia que o material proporciona atividades práticas que exploram a identificação e reconhecimento das figuras geométricas no cotidiano dos alunos. Ao introduzir figuras espaciais, como cones, cilindros e esferas, a partir de objetos comuns, como chapéus e latas, o livro facilita a compreensão dos alunos ao relacionar conceitos abstratos com elementos concretos. Esse método é coerente com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que propõe o ensino de geometria com base em experiências e observações reais para desenvolver o pensamento geométrico desde os primeiros anos escolares.

Além disso, a disposição dos conteúdos nos capítulos quatro e oito permite uma progressão gradativa na aprendizagem das formas geométricas. No quarto capítulo, os alunos começam com figuras espaciais, e posteriormente, no oitavo capítulo, são introduzidos às figuras planas. Ao utilizar atividades como jogos de observação e comparação entre figuras, o livro estimula o desenvolvimento do raciocínio lógico e geométrico dos alunos, algo que a BNCC também

destaca como essencial para a formação matemática básica. A utilização de jogos, como o Tangram, no final do oitavo capítulo, reforça a capacidade de visualização e manipulação de figuras, fundamentais para a internalização de conceitos geométricos.

No entanto, conforme apontado por Santos (2008), há uma lacuna nas práticas pedagógicas que exploram a geometria em sua totalidade nas escolas. A análise do livro revela um esforço para integrar o conteúdo geométrico às demais áreas da matemática, como a aritmética e a análise de dados. Contudo, percebe-se a necessidade de maior profundidade em certos tópicos, como simetrias e transformações geométricas, que, apesar de fundamentais, são abordados de forma limitada. A BNCC destaca a importância de tais temas para o desenvolvimento do pensamento matemático completo, sugerindo que o livro poderia oferecer uma abordagem mais ampla sobre esses conceitos.

Outro ponto que se sobressai na análise é a ênfase na utilização de materiais concretos e manipulativos, como sugere Lindquist (1994). O uso de objetos tridimensionais e atividades que envolvem desenhos, recortes e formas geométricas permite que os alunos estabeleçam uma relação direta entre o conteúdo estudado e o mundo físico. Esse tipo de abordagem estimula os alunos a visualizarem, compararem e raciocinarem com base nas formas geométricas, fortalecendo seu entendimento e aplicabilidade em situações do cotidiano.

Por fim, a análise dos resultados permite concluir que o livro didático cumpre parte dos objetivos propostos pela BNCC, principalmente ao estimular a visualização e manipulação de formas geométricas no cotidiano. No entanto, para um ensino mais completo e eficaz, seria pertinente um aprofundamento maior em conceitos geométricos mais avançados e a integração com outros materiais pedagógicos que possam complementar as lacunas existentes. Isso proporcionaria uma formação geométrica mais sólida, preparando os alunos para o desenvolvimento de habilidades complexas ao longo dos anos escolares.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho não teve a pretensão de esgotar as inúmeras possibilidades de aprofundamento sobre a análise do conteúdo de geometria presente no livro didático de matemática do 2º ano do Ensino Fundamental. O foco foi observar e analisar como esse conteúdo é abordado, refletindo sobre as formas como a geometria é trabalhada nas salas de aula. A geometria, por ser uma área fundamental da matemática e presente em várias situações cotidianas, exige uma abordagem que vá além da simples identificação de formas, e a análise realizada apontou a importância de se explorar essas relações em sala de aula de maneira significativa e contextualizada.

Nas análises, percebeu-se que o livro didático apresenta atividades que buscam conectar os conhecimentos geométricos com o cotidiano dos alunos. Essa conexão é fundamental para que os alunos possam reconhecer as formas geométricas não apenas no ambiente escolar, mas também em sua vida diária. No entanto, embora o material ofereça atividades que visam essa correlação, ainda há uma lacuna no desenvolvimento de habilidades que permitam aos alunos entenderem mais profundamente o uso da geometria em diversas situações do mundo real. É importante que essas atividades não apenas mostrem as formas, mas também instiguem os alunos a raciocinar sobre suas propriedades e aplicações.

Além disso, as análises revelaram a correlação entre diferentes conteúdos da matemática, o que reforça a importância da integração entre áreas do conhecimento. A geometria, ao ser abordada em conjunto com conceitos como a aritmética e a análise de dados, proporciona uma visão mais ampla e interdisciplinar da matemática. Essa interdisciplinaridade é essencial, pois permite que os alunos compreendam a matemática de forma mais completa e significativa, aplicando os conceitos geométricos em diversas situações cotidianas e acadêmicas. No entanto, notou-se que a relação entre geometria e outras áreas do conhecimento poderia ser mais explorada, de modo a enriquecer ainda mais a aprendizagem.

Outro aspecto observado foi o uso de materiais concretos e manipulativos, que facilitam a visualização e a compreensão das formas geométricas pelos alunos. A utilização de objetos do cotidiano, como chapéus de festa, latas e pirulitos, contribui para que os alunos reconheçam figuras tridimensionais e bidimensionais em contextos familiares. Essa abordagem é essencial para o desenvolvimento de habilidades espaciais, permitindo que os alunos relacionem o conteúdo matemático com suas próprias experiências. No entanto, há uma necessidade de aprimorar o uso desses materiais e promover uma exploração mais profunda das propriedades das formas, para que os alunos possam construir um conhecimento mais sólido e duradouro.

Apesar dos resultados satisfatórios obtidos com a análise do conteúdo de geometria, é necessário reconhecer que o ensino desse conteúdo precisa ser constantemente revisitado e aprimorado. A abordagem da geometria nas salas de aula ainda enfrenta desafios, como o despreparo de muitos professores em lidar com esse conteúdo de maneira adequada, conforme aponta Santos (2008). Portanto, para que o ensino de geometria seja mais efetivo, é fundamental que haja uma formação contínua dos docentes, de forma que possam desenvolver estratégias pedagógicas mais inovadoras e alinhadas às necessidades dos alunos. Assim, será possível garantir que o ensino da geometria, desde os primeiros anos do ensino fundamental, contribua para o desenvolvimento de habilidades cognitivas essenciais para a vida acadêmica e cotidiana.

Por fim, ao analisar o conteúdo de geometria no 2º ano do Ensino Fundamental, verificou-se que as atividades propostas no livro didático são relevantes e pertinentes para o desenvolvimento das habilidades exigidas pela BNCC. No entanto, é necessário que os professores aproveitem essas atividades para promover reflexões mais profundas e relações mais significativas entre os conceitos matemáticos e o mundo que os alunos vivenciam. Dessa forma, será possível formar alunos críticos, capazes de utilizar o conhecimento geométrico de maneira criativa e aplicada, não apenas dentro da sala de aula, mas também em situações práticas da vida cotidiana. O estudo da geometria, portanto, deve ser visto como uma oportunidade para ampliar as percepções dos alunos sobre o espaço ao seu redor, promovendo uma compreensão mais rica e integrada da realidade.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Proposta preliminar. Segunda versão revista. Brasília: MEC, 2017.

LINDQUIST, Mary M.; SHULTE, Alberto P., orgs. Aprendendo e ensinando geometria. São Paulo: Atual, 1994.

OBRA COLETIVA, Editora Moderna, matemática – 2º ano do ensino fundamental, p.81. 2017.

SANTOS, Fabiano Oliveira. A dificuldade de ensinar Geometria. Artigo apresentado à Universidade Estadual Vale do Acaraú como requisito avaliativo da disciplina Estágio Supervisionado I, do Curso de Licenciatura em Matemática. Lagarto – SE 2008.

SOLUÇÃO FRACA PARA UM PROBLEMA FÍSICO DE VIBRAÇÕES SOBRE CORDAS TRANSVERSAIS A PARTIR DO ESPAÇO DE SOBOLEV

 Crossref  10.56238/livrosindi202535-033

Benedito Guimarães do Carmo Junior

E-mail: b.juniorguimaraes14@gmail.com

Júlio Roberto Soares da Silva

E-mail: julioroberto@ufpa.br

RESUMO

Equações Diferenciais Parciais é ramo da matemática que lida com equações envolvendo funções de diversas variáveis e suas derivadas parciais, dependendo da natureza da equação e das condições envolvidas, existem diferentes métodos para resolver EDPs. O estudo trata-se de uma pesquisa bibliográfico. O objetivo do artigo é determinar a solução fraca para um problema físico de vibrações sobre cordas transversais.

Palavras-chave: Equações de Derivadas Parciais, Soluções fracas, Espaços de Sobolev.

1 INTRODUÇÃO

Equações Diferenciais Parciais (EDP) são um ramo da matemática que lida com equações envolvendo funções de diversas variáveis e suas derivadas parciais. Elas são usadas para descrever fenômenos físicos e naturais que variam no espaço e no tempo. As EDPs surgem em diferentes contextos, por exemplo, na física, descrevendo a propagação de ondas, propagação de calor, movimento de fluidos, na engenharia, como na análise de estruturas, modelagem dinâmica e em outros campos da ciência. Para isso, a solução de uma EDP é uma função que satisfaz uma equação diferencial e geralmente requer um limite ou condições iniciais específicas. Dependendo da natureza da equação e das condições envolvidas, existem diferentes métodos para resolver EDPs.

Neste sentido, neste artigo estamos preocupados com a existência de soluções fracas para a seguinte classe de problemas das equações diferenciais parciais utilizando o espaço de Sobolev. Nosso objetivo é determinar a solução fraca para um problema físico de vibrações sobre cordas transversais.

Dessa forma, a pesquisa foi realizada como parte de um projeto de iniciação científica durante os anos de 2021 a 2022, com metodologia baseada em pesquisas bibliográficas. Inicialmente foi feito um estudo sobre um problema físico de vibrações sobre cordas transversais, de modo que este estudo traz embasamento para calcular a solução fraca de uma equação diferencial parcial, após levantamentos bibliográficos do problema, as pesquisas foram apresentadas em forma de seminários

de modo online utilizando a plataforma Google Meet e presencialmente na sede do Campus universitário do Tocantins e nos polos da Universidade Federal do Pará.

Nossa pesquisa baseia-se nos estudos de Falcão (2018) e Medeiros (1983), o problema de vibrações sobre cordas transversais é caracterizado por problemas mistos que o modelam. Inicialmente, a pesquisa buscou compreender esses problemas mistos, desconsiderando a solução no sentido clássico proposta por Newton e Leibniz. Assim, a pesquisa foi dividida em três etapas: primeiro, o estudo sobre pequenas vibrações sobre uma corda transversal; segundo um estudo sobre o espaço de Sobolev e terceiro, apresentar a solução do problema proposto sobre pequenas vibrações sobre uma corda transversal.

2 CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA E OS ESPAÇOS DE SOBOLEV

Considere-se uma corda elástica, perfeitamente flexível, espichada ao longo do eixo $0x$ de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $x0u$, onde 0 é a origem do sistema. Supõe-se a corda de comprimento L , com extremos fixos em $x = 0$ e $x = L$, mas com uma tensão τ constante ao longo da corda. Esta situação inicial denomina-se configuração de equilíbrio ou de repouso da corda.

Quando perturbamos a configuração de equilíbrio, fazendo com que a corda vibre livremente no plano $x0u$, de modo que cada uma de suas partículas mova-se sobre uma reta perpendicular ao eixo $0x$. Tal situação é plausível, supondo-se a amplitude de vibração da corda tão pequena que sua inclinação, relativa ao eixo $0x$, seja pequena quando comparada à sua configuração de repouso. Isto equivale a dizer que se um segmento dx da corda em repouso deforma-se em um arco de curva ds no instante t , então $ds \approx dx$.

Resultam, daí, os seguintes problemas mistos caracterizando o fenômeno físico analisado.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial x} \right) \\ \text{para todo } v \text{ admissível} \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x) \text{ em }]0, L[\\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \text{ em }]0, T[\end{array} \right. \quad (1)$$

Tal caracterização pode ser reformulada, a ponto de sua solução ser obtida pelo método de D'Alembert, no sentido clássico das derivadas parciais. Para determinarmos a solução de (1) recorreremos aos seguintes resultados.

Proposição 1: Considere dois subconjuntos $K, F \in \mathbb{R}$ sendo K compacto e F fechado, disjuntos. Então existe $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$ satisfazendo a condição

$$\varphi = 1 \text{ em } K, \varphi = 0 \text{ em } F \text{ e } 0 \leq \varphi \leq 1$$

Demonstração: A demonstração pode ser vista em (4).

Definição 1: Denomina-se distribuição sobre (a, b) , a toda forma linear contínua sobre $D(a, b)$. Uma distribuição sobre (a, b) é uma forma $T: D(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

1. $T(\alpha\varphi + \beta\phi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\phi), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \varphi, \phi \in D(a, b)$
2. T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ em $D(a, b)$ então $T((\varphi_n)_n \in \mathbb{N})$ em $\mathbb{R}$.

Proposição 2 (Lema de Du Bois Raymond): Seja $u \in L_{loc}^1(a, b)$ tal que

$$\int_a^b u(x) \varphi(x) dx = 0, \quad \text{para toda } \varphi \in D(a, b)$$

Então $u = 0$ quase sempre em (a, b) .

Definição 2 (Derivação de distribuição): Considere uma função f continuamente derivável em $\mathbb{R}$. Então, para toda $\varphi \in D$, integrando por partes temos

$$\int_{\mathbb{R}} f \varphi' dx = - \int_{\mathbb{R}} f' \varphi dx$$

Definição 3: Diz-se, segundo Sobolev, que se f possui derivada fraca, quando existe uma $h \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} f \varphi' dx = - \int_{\mathbb{R}} h \varphi dx$$

para toda função $\varphi \in D(\mathbb{R})$. A função h denomina-se a derivada fraca de f .

Definição 4: Definimos Espaço de Sobolev de ordem m sobre (a, b) , como o espaço vetorial das $f \in L^2(a, b)$ tais que as derivadas no sentido das distribuições $\frac{d^n f}{dx^n}$, $n = 1, 2, \dots, m$ pertençam a $L^2(a, b)$. Representa-se por $H^m(a, b)$ o espaço de Sobolev de ordem m sobre (a, b) , com a seguinte estrutura hilbertiana:

$$\begin{cases} \text{Produto escalar: } ((f, n)) = \int_a^b f n \, dx + \sum_{n=1}^m \int_a^b \frac{d^n f}{dx^n} \cdot \frac{d^n n}{dx^n} \, dx \\ \text{Norma: } ||f||^2 = \int_a^b f^2 \, dx + \sum_{n=1}^m \int_a^b \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)^2 \, dx \end{cases} \quad (2)$$

adota-se para $L^2(a, b)$ a seguinte notação

$$\begin{cases} \text{Produto escalar: } (f, n) = \int_a^b f n \, dx \\ \text{Norma: } |f|^2 = \int_a^b f^2 \, dx \end{cases} \quad (3)$$

3 SOLUÇÃO FRACA PARA O PROBLEMA DE FÍSICO DE VIBRAÇÕES SOBRE CORDAS TRANSVERSAIS

Proposição (Identidade de Parseval-Vitali): Uma condição necessária e suficiente para que uma sucessão $(w_v)_{v \in \mathbb{N}}$, ortonormal em $L^2(a, b)$, seja completa é que seja válida a identidade

$$x - a = \sum_{v=1}^{\infty} \left(\int_a^x w_v(s) \, ds \right)^2 \quad (4)$$

para todo $x \in (a, b)$.

Demonstração: A demonstração pode ser vista em (2).

A reformulação da caracterização de (1), como será vista em (8) parte da demonstração que a sucessão $(w_v)_{v \in \mathbb{N}}$ definida por

$$w_{v(s)} = \left(\frac{2}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \frac{v\pi x}{L}$$

com $x \in (0, L)$ é completa.

Solução: É suficiente verificar (4) para todo $x \in (0, L)$, isto é,

$$x = \sum_{v=1}^{\infty} \left(\int_a^x \left(\frac{2}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \frac{v\pi x}{L} ds \right)^2$$

De fato,

$$\frac{2L}{\pi^2} \cdot \frac{1}{v^2} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos \frac{v\pi x}{L} + \frac{2}{4} \cos \frac{2v\pi x}{L} \right)$$

tem-se

$$x = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2L}{\pi^2} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{v^2} - \frac{2 \cos v \lambda}{v^2} + \frac{1}{4} \frac{2 \cos v \lambda}{v^2} \right) = -\frac{3L\lambda^2}{4\pi^2} + \frac{3\pi\lambda L}{2\pi^2}$$

Portanto, o resultado é verificado. Além disso, pela Proposição (4), a sucessão $(w_v)_{\{v \in \mathbb{N}\}}$ é uma base de Hilbert de $L^2(a, b)$.

Quando modelado o problema de vibrações transversais de uma corda elástica e apresentamos por meio do Princípio de Hamilton, verifica-se que as vibrações u são caracterizadas por funções reais definidas em $Q = \{(x, t); 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$ que satisfazem:

$$\int_0^T \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dt dx = 0 \quad (5)$$

para todo v admissível em Q . Agora, definindo uma função $\theta(t)v(x)$, sendo $\theta \in D(0, T)$ e $v \in H_0^1(0, L)$, tem-se que $\theta(t)v(x)$ é admissível em Q . Sendo assim, substituindo $\theta(t)v(x)$ em (5) e integrando por partes, obtemos

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt} (u'(t), v) + (u(t), v) \right) \theta(t) dx dt = 0 \quad (6)$$

observa-se que $(u'(t), v)$ é o produto escalar em L^2 e $((u(t), v))$ é o produto escalar em $H_0^1(0, L)$. Portanto, estendemos como solução uma função que satisfaz a identidade (6) para toda $v \in H_0^1(0, L)$ e todo $\theta \in D(0, T)$. Além disso, a identidade (6) em $D'(0, T)$ é equivalente à

$$\frac{d}{dt} (u'(t), v) + (u(t), v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(0, L) \quad (7)$$

Sendo assim, por todas as informações supracitadas, vamos buscar uma solução para o problema abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & 0 \leq x \leq L, t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & 0 < x < L \end{cases} \quad (8)$$

A estratégia utilizada para a solução de (8) é o método de separação de variáveis. Suponha que u pode ser escrito como

$$u(x, t) = X(x)T(t) \neq 0$$

em que X depende apenas de x e T apenas de t . Substituindo esta função em (8), obtemos

$$X(x)T''(t) - X''(x)T(t) = 0 \quad (9)$$

em que $X'(x)$ e $T'(t)$ representam suas respectivas derivadas. Assim

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda, \lambda > 0 \quad (10)$$

e $X(0) = 0 = X(L)$. O valor de λ acima é chamado de constante de separação.

Com a hipótese dos extremos fixos, podemos escrever (8) da forma:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < L \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

e

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad t > 0 \quad (12)$$

Como $\lambda > 0$, a solução $X(x)$ de (11) tem a seguinte forma:

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x \quad (13)$$

com c_1 e c_2 constantes.

Utilizando as respectivas condições de fronteira, obtemos

$$X(0) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} 0 + c_2 \sen \sqrt{\lambda} 0$$

de modo que $c_1 = 0$ e $X(L) = \sen \sqrt{\lambda} L = 0$, o que nos leva a denotar:

$$\sqrt{\lambda} L = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

Portanto, as soluções de (11) para $X(x)$ são da forma:

$$X_n(x) = \sen \frac{n\pi x}{L} \quad (14)$$

em que $n = 1, 2, \dots$. As soluções para (12) de $T(t)$ são da forma:

$$T_n(t) = k_{1n} \cos \frac{n\pi t}{L} + k_{2n} \sen \frac{n\pi t}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

onde k_1 e k_2 são constantes. A partir de (14) e (15) podemos escrever $u_n(x, t)$ da forma

$$u_n(x, t) = \left(k_{1n} \cos \frac{n\pi t}{L} + k_{2n} \sen \frac{n\pi t}{L} \right) \sen \frac{n\pi x}{L} \quad (16)$$

Logo, uma possível solução $u(x, t)$ de (11) tem a forma:

$$u_n(x, t) = \left(k_{1n} \cos \frac{n\pi t}{L} + k_{2n} \sen \frac{n\pi t}{L} \right) \sen \frac{n\pi x}{L} \quad (17)$$

Agora, analisando as condições iniciais, temos

$$u_n(x, 0) = \left(k_{1n} \cos \frac{n\pi 0}{L} + k_{2n} \sen \frac{n\pi 0}{L} \right) \sen \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} k_{1n} \sen \frac{n\pi x}{L} = u_0(x), \quad 0 < x < L \quad (18)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-k_{1n} \frac{n\pi}{L} \sen \frac{n\pi t}{L} + k_{2n} \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi t}{L} \right) \sen \frac{n\pi x}{L} \quad (19)$$

ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_{2n} \frac{n\pi}{L} \sen \frac{n\pi x}{L} = u_1(x), \quad 0 < x < L \quad (20)$$

Sabemos que a sucessão $w_n(s) = \left(\left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \text{sen} \frac{n\pi x}{L}\right)$ é uma base de Hilbert em $L^2(0, L)$.

Considerando-se $u_0, u_1 \in L^2(0, L)$, podemos escrever u_0 e u_1 da forma abaixo considerando a série de Fourier, logo:

$$\begin{cases} u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (u_0, w_n)_{L^2(0,L)} w_n, \\ u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (u_1, w_n)_{L^2(0,L)} w_n \end{cases} \quad (21)$$

Comparando-se (17), (18), (20) e (21) obtemos,

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (u_0, w_n) w_n = \sum_{n=1}^{\infty} k_{1n} \frac{n\pi}{L} \text{sen} \frac{n\pi t}{L} \quad (22)$$

e

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (u_1, w_n) w_n = \sum_{n=1}^{\infty} k_{2n} \frac{n\pi}{L} \text{sen} \frac{n\pi t}{L} \quad (23)$$

ou seja, $k_{1n} = (u_0, w_n)$, $n = 1, 2, \dots$ e $k_{2n} = (u_1, w_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Substituindo estas duas últimas igualdades em (17), encontra-se

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left((u_0, w_n)_{L^2(a,b)} \cos \frac{n\pi t}{L} + (u_1, w_n)_{L^2(a,b)} \frac{L}{n\pi} \text{sen} \frac{n\pi t}{L} \right) w_n \quad (24)$$

como possível solução do problema proposto em (8) então $u(x, t)$ dado por (24) é solução fraca de (8), isto é, uma solução de (8) no sentido de Hamilton.

4 CONCLUSÃO

As equações diferenciais são estudadas na graduação nos cursos de ciências exatas. Durante o curso, é visto que certas funções, como a modular, não possuem derivada; ou seja, no ponto de origem, não é possível calcular sua derivada, pois neste ponto há uma descontinuidade na função. Desse modo, o presente trabalho objetivou calcular a derivada dessas funções. Concluimos que, para essas funções, devemos considerar a derivada no sentido fraco, calculando-a nos intervalos onde a função é contínua. Para isso, enunciamos alguns resultados do espaço das funções localmente integráveis e uma introdução ao espaço de Sobolev, de modo que pudéssemos ter a solução para esse tipo de função e, a partir desses resultados, buscar soluções para problemas como o de vibrações transversais de uma corda elástica.

Em suma, muitos fenômenos físicos são descritos a partir de EDPs, e sua modelagem produz funções que descrevem tal evento. No entanto, ao calcularmos suas soluções, podemos obter funções que não admitam derivadas no sentido clássico. Então, o espaço de Sobolev nos permite obter a solução de tal modelagem no sentido fraco, ou seja, calcular a derivada da função nas regiões onde ela é contínua.

REFERÊNCIAS

- [1] DOMINGUES, H. H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. São Paulo: Atual, 1982.
- [2] FALCÃO, J. F. A. **Solução fraca para a equação de vibrações de uma corda elástica**. Campina Grande: UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA, 2018.
- [3] LIMA, E. L. **curso de análise**. 15ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.
- [4] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. **Introdução aos espaços de Sobolev e as equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro, RJ: Instituto de Matemática –UFRJ, 1983.
- [5] MEDEIROS, L. A.; ANDRADE, N. G. **Iniciação as equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro, RJ: Livros Técnicos & Científicos, 1978.
- [6] OLIVEIRA, C. R. de. **Introdução a análise funcional**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018

UM REPASSO SOBRE TEOREMA DE EULER E TEOREMA DE WILSON

 Crossref  10.56238/livrosindi202535-034
Clebson Lopes Goncalves

E-mail: clebsonlopes1999@gmail.com

Michael Jackson Carvalho Farias

E-mail: michaelcarvalhofarias@gmail.com

Júlio Roberto Soares da Silva

E-mail: julioroberto@ufpa.br

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo principal mostrar as demonstrações dos Teoremas de Euler, uma generalização do Pequeno Teorema de Fermat e um Teorema de Lagrange, conhecido pelo nome de Teorema de Wilson, bem como suas aplicabilidades por meio de exemplos com cálculos aplicados. Esses teoremas têm sua importância inestimável na Teoria dos Números, sendo base para relevantes resultados ao serem utilizados como ferramentas para o estudo de números primos e congruências lineares.

Palavras-chave: Congruências, Teorema de Euler, Teorema de Wilson.

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho ora apresentado tem foco nas demonstrações dos Teoremas de Euler e Wilson e suas aplicabilidades por exemplos resolvidos. Para alcançar esse objetivo, serão mostrados conceitos como os de inteiros congruentes, congruência no conjunto dos restos e aplicação da congruência no cálculo do resto, caminho este que nos levará às aplicações da congruência em $\mathbb{Z}$, onde os referidos teoremas têm sua aplicabilidade.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

É comum em matemática nos depararmos com problemas envolvendo números relativamente grandes, tornando inviável suas resoluções utilizando apenas as operações de aritmética básica. Determinar o resto da divisão de $15!$ por 17, por exemplo, é uma tarefa extremamente difícil.

É comum, em Matemática, nos depararmos com problemas envolvendo números relativamente grandes, tornando inviável suas resoluções utilizando apenas as operações de aritmética básica. Determinar o resto da divisão de $15!$ por 17, por exemplo, é uma tarefa extremamente difícil.

Contudo, para problemas como o destacado acima, o conceito de **congruência** é uma importante e eficaz ferramenta na sua solução. Vamos entender este conceito.

Dado um inteiro não nulo m , dizemos que os inteiros a e b são **congruentes módulo m** se eles deixam o mesmo resto na divisão euclidiana por m . Para indicar que a e b são congruentes módulo m , escreve-se:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Ao trabalhar **congruência** no conjunto dos restos, em particular na divisão euclidiana por um inteiro $m > 1$, podemos afirmar que todo inteiro é congruente módulo m ao seu **resto r** na divisão por m . Como esse resto é único, ele é congruente a um único elemento do conjunto $R = \{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$.

Ao aplicá-la no cálculo do resto, como por exemplo calcular o **resto da divisão de 3212 por 40**, número demasiadamente grande, essa operação se torna uma tarefa menos complexa. Isso ocorre porque o cálculo difere das operações aritméticas comuns, sendo mais eficaz para esse fim.

Na aplicação da congruência em $\mathbb{Z}$, estudaremos dois importantes teoremas: o **Teorema de Euler** e o **Teorema de Wilson**, ambos relacionados à congruência.

2.1 PEQUENO TEOREMA DE FERMAT

O **Pequeno Teorema de Fermat** (PTF) é um teorema importante na **teoria dos números**. Apesar de ser associado a Fermat, sua demonstração foi publicada por **Euler**.

Definição 1: Se p é um número primo e a é um número inteiro tal que $p \nmid a$, então:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

2.2 TEOREMA DE EULER

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{Z}$ com $\text{mdc}(b, n) = 1$. Então $b^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Demonstração: Podemos supor $n \geq 2$. Sejam $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_{\varphi(n)} = n - 1$ os restos entre $0, 1, 2, \dots, n - 1$ e relativamente primos com n . Temos que $\{b, ba_2, \dots, ba_{\varphi(n)}\}$ é um sistema reduzido de restos $\pmod{n}$, pois $\forall i, j = 1, 2, \dots, \varphi(n): ba_i \equiv ba_j \pmod{n} \Rightarrow ai = aj \Rightarrow i = j$. Segue que

$$ba_1 \cdot ba_2 \cdot \dots \cdot ba_{\varphi(n)} \equiv a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{\varphi(n)} \pmod{n},$$

ou seja,

$$b^{\varphi(n)} \cdot a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{\varphi(n)} \equiv a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{\varphi(n)} \pmod{n}.$$

Como $\text{mdc}(a_1 a_2 \cdots a_{\varphi(n)}, n) = 1$, podemos calcular esse fator da congruência e obtemos $b^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. É claro que para $n = p$ primo ($\varphi(n) = \varphi(p) = p - 1$), o teorema de Euler passa a ser o teorema de Fermat.

2.3 TEOREMA DE WILSON

O Teorema de Wilson nos dá um teste de primalidade, ou seja, uma condição necessária e suficiente para que um determinado número seja primo. O número inteiro p é primo se, e somente se $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Teorema: Se $p > 1$ é um número primo, então p divide $(p - 1)! + 1$.

Demonstração: O resultado é obviamente verdadeiro para $p = 2$. Supondo $p \geq 3$, então pelos Lemas 3 e 4, para cada $a_i \in A' = \{2, 3, \dots, p - 2\}$, existe $r_i \in A'$, com $r_i \neq a_i$, tal que $a_i r_i \equiv 1 \pmod{p}$. Assim, temos as $\frac{1}{2}(p - 3)$ congruências:

$$\begin{aligned} a_1 r_1 &\equiv 1 \pmod{p} \\ a_2 r_2 &\equiv 1 \pmod{p} \\ &\dots \\ a_{\frac{1}{2}(p-3)} r_{\frac{1}{2}(p-3)} &\equiv 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Multiplicando essas congruências, obtemos:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (p - 2) \equiv 1 \pmod{p}.$$

Por outro lado, também temos a congruência elementar: $(p - 1) \equiv (-1) \pmod{p}$.

Multiplicando essas duas últimas congruências, obtemos:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (p - 2)(p - 1) \equiv (-1) \pmod{p} \Rightarrow (p - 1)! \equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow p \mid ((p - 1)! + 1),$$

como queríamos demonstrar.

3 METODOLOGIA

Este trabalho foi desenvolvido por meio de uma **pesquisa bibliográfica**, na qual buscamos apresentar conceitos como os de **congruência**, **congruência no conjunto dos restos** e sua **aplicação**, a fim de fornecer embasamento aos estudos e à demonstração dos teoremas aqui apresentados.

Ao estudar esses teoremas, por meio de suas demonstrações e aplicações, fomos motivados pelo anseio de compreender suas diferenças e contribuições para a Matemática. Cada teorema tem sua relevância particular, e relacioná-los através da congruência nos mostrou como cada um se comporta. O Teorema de Euler se apresenta como uma generalização do Pequeno Teorema de Fermat, o qual nos oferece um teste para identificar números não primos. O Teorema de Wilson, por sua vez, nos fornece um teste de primalidade.

Por fim, com as aplicações apresentadas em cada teorema, foi possível observar sua utilidade na Matemática, uma vez que ambos utilizam o conceito de congruência para alcançar resultados expressivos com números relativamente grandes.

4 APLICAÇÕES

4.1 APLICAÇÃO DO TEOREMA DE EULER

Exemplo 1: Determine o resto da divisão de $5^{(30153)}$ por 9.

Solução: Como $\text{mdc}(5, 9) = 1$, pelo Teorema de Euler temos:

$$5^{\varphi(9)} \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 5^6 \equiv 1 \pmod{9}.$$

Relacionando 6 com o expoente 3015^3 , temos:

$$3015 \equiv 3 \pmod{6} \Rightarrow 3015^3 \equiv 3^3 \equiv 3 \pmod{6} \Rightarrow 3015^3 = 6q + 3, q \in \mathbb{Z}.$$

Então,

$$5^{(30153)} = 5^{(6q+3)} = 5^{6q} \cdot 5^3.$$

Como $5^6 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 5^{6q} \equiv 1 \pmod{9}$ e $5^3 \equiv 8 \pmod{9}$, segue que: $5^{(30153)} = 5^{(6q)} \cdot 5^3 \equiv 1 \cdot 8 \equiv 8 \pmod{9}$.

Portanto, o resto é 8.

4.2 APLICAÇÃO DO TEOREMA DE WILSON

Exemplo 2: Encontre o resto da divisão de $97!$ por 101.

Solução: Sabemos que $100! \equiv -1 \pmod{101}$. Assim, temos:

$$100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97! \equiv -1 \pmod{101}.$$

Calculando os produtos:

$$(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot 97! \equiv -1 \pmod{101}.$$

Portanto, simplificando, obtemos:

$$2 \cdot 3 \cdot 97! \equiv 1 \pmod{101}.$$

Agora, reescrevendo 2 e 3 na forma de equivalências:

$$2 \cdot 51 \cdot 3 \cdot 34 \cdot 97! \equiv 51 \cdot 34 \pmod{101}.$$

Assim, temos:

$$97! \equiv 17 \pmod{101}. \text{ Logo, o resto é } 17.$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao apresentar este trabalho, podemos constatar a importância dos Teoremas de Euler e de Wilson, visto que, para demonstrá-los, foi necessário abordar diversos conceitos, como números primos, congruência, congruência no conjunto dos restos, entre outros.

Além disso, cada um desses teoremas possui suas particularidades: o Teorema de Euler é tratado como uma generalização do Pequeno Teorema de Fermat, que oferece um teste para identificar números não primos; já o Teorema de Wilson fornece uma condição necessária e suficiente para comprovar que um número é primo, sendo, portanto, um teste de primalidade.

REFERÊNCIAS

- BEZERRA, M. N. C. *Teoria dos números: um curso introdutório*. 1. ed. Belém do Pará: EditAed, 2018. 193 p.
- SANTOS, J. P. O. *Introdução à teoria dos números*. 1. ed. Rio de Janeiro: Grafitex, 1998. 103 p.
- YIN, R. K. *Estudo de caso: planejamento e métodos*. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2015. 290 p.
- HEFEZ, A. *Aritmética*. Rio de Janeiro: SBM, 2016. 298 p. (Coleção PROFMAT; 08). ISBN 978-85-8337-105-2.
- TEODISTA, J. C. S. *Os Teoremas de Fermat, Euler e Wilson*. 2013. 59 f. Monografia (Licenciatura Plena em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2013.
- UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS. *Revista da Olimpíada / Instituto de Matemática e Estatística*. Goiânia: Editora da UFG, 2019. v. anual, n. 14, nov. 2019/nov. 2020. ISSN 1518-6075. CDU: 51(05).
- UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA. Departamento de Matemática. *Teoria dos números: texto aula*. Disponível em: <https://mat.unb.br/maier/tnotas.pdf>. Acesso em: 22 out. 2024.
- UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Instituto de Matemática e Estatística. *Lista com 4 respostas*. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~iusenko/ensino_2020_3/MAT0120/listas/Lista4_Sol.pdf. Acesso em: 22 out. 2024.
- UNI-MATHEMA. *Teorema de Wilson*. YouTube, 17 jan. 2022. 1 h 16 min 34 s. Disponível em: <https://youtu.be/o8mmY2oOm6Y?si=JPDnggmYIDtbgRW8>. Acesso em: 21 out. 2024.

UM REPASSO SOBRE CONGRUÊNCIAS LINEARES E CLASSES RESIDUAIS: APLICAÇÕES ENVOLVENDO QUESTÕES DO EXAME NACIONAL DE QUALIFICAÇÃO DO PROFMAT

  10.56238/livrosindi202535-035

Erikles dos Santos Pantoja

E-mail: eriklessantos63@gmail.com

Rangel Ferreira da Silva

E-mail: rangelferreira0112@gmail.com

Prof. Dr. Julio Roberto Soares da Silva

E-mail: julioroberto@ufpa.br

RESUMO

Este artigo explora conceitos fundamentais da aritmética modular, com foco na resolução de congruências lineares e no estudo dos elementos invertíveis em Z_m . A partir de exemplos práticos, como questões do Exame Nacional de Qualificação (ENQ), são discutidos temas como o Teorema Chinês dos Restos, o cálculo de inversos modulares e a resolução de sistemas de congruências. Demonstra-se como o uso de ferramentas como o algoritmo de Euclides e a substituição retroativa facilita a resolução de equações modulares e a determinação de soluções mínimas. Além disso, a análise dos elementos invertíveis em Z_{24} revela propriedades importantes, como o fato de todos os elementos invertíveis serem seus próprios inversos, bem como a soma e o produto desses elementos. A relevância dos conceitos abordados é destacada em aplicações práticas, como criptografia e teoria dos códigos, evidenciando a importância da aritmética modular em contextos acadêmicos e tecnológicos.

Palavras-chave: Congruências Lineares, Teorema do Resto Chinês, Classes Residuais.

1 INTRODUÇÃO

A aritmética modular, fundamental na teoria dos números, tem aplicações práticas em áreas como criptografia e teoria dos códigos. Este estudo aborda temas essenciais como sistemas de congruências, elementos invertíveis em anéis modulares e a solução de equações lineares modulares, oferecendo uma base sólida para a compreensão de fenômenos matemáticos mais complexos. Focando em conceitos-chave, como congruências lineares e elementos invertíveis em Z_m , o artigo destaca sua relevância em contextos acadêmicos e práticos, especialmente em exames de qualificação e aplicações computacionais.

Problemas envolvendo congruências lineares, comuns em exames de qualificação, como o Exame Nacional de Qualificação (ENQ), exigem uma compreensão avançada dessas técnicas. A resolução de congruências na forma $ax \equiv b \pmod{m}$, o uso do Teorema Chinês dos Restos e o cálculo de inversos modulares são ferramentas fundamentais para lidar com questões de natureza aritmética e estrutural. O artigo enfatiza a importância e a aplicabilidade dessas técnicas na matemática e em outras áreas, mostrando como sustentam a resolução de problemas complexos.

Em particular, o Teorema Chinês dos Restos facilita a solução de sistemas de congruências com módulos coprimos, permitindo soluções únicas em um módulo composto e ilustrando a importância de propriedades como coprimidade. O estudo dos elementos invertíveis em Z_m , que depende da condição $\text{mdc}(a, m) = 1$, também revela propriedades fundamentais da aritmética modular, essenciais para resolver congruências e aplicáveis em campos como criptografia e segurança. Ao explorar essas propriedades e aplicações, o artigo contribui para a compreensão de um tema essencial e de grande relevância acadêmica e tecnológica.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção, abordamos conceitos fundamentais da teoria dos números, enfatizando o Teorema do Resto Chinês e as classes residuais, elementos essenciais para o estudo das congruências e suas aplicações práticas. Inicialmente, exploramos o Teorema do Resto Chinês, que oferece um método sistemático para resolver sistemas de congruências lineares simultâneas com módulos coprimos, assegurando uma solução única e aplicável em áreas como criptografia e computação. Em seguida, destacamos o conceito de classes residuais, que organiza o conjunto dos inteiros em subconjuntos com propriedades específicas, facilitando operações em contextos modulares, como na Teoria dos Códigos Corretores de Erros. Por fim, examinamos as classes residuais invertíveis e o critério de inversibilidade, que determina as condições para que um elemento de Z_m possua um inverso, ampliando a aplicabilidade da aritmética modular em áreas algébricas e computacionais. Esses fundamentos não só fornecem as bases teóricas, mas também revelam aplicações práticas em processos de cálculo eficientes e em tecnologias de segurança digital.

2.1 DEFINIÇÃO E CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DAS SOLUÇÕES DA CONGRUÊNCIA LINEAR $ax \equiv b \pmod{m}$.

A congruência linear, expressa como uma equação do tipo $ax \equiv b \pmod{m}$, envolve inteiros a e b e um inteiro positivo m . Conforme Filho (1981), qualquer x_0 que satisfaça $ax_0 \equiv b \pmod{m}$ é uma solução da congruência, ocorrendo apenas se m divide $ax_0 - b$, ou seja, se existe um inteiro y_0 tal que $ax_0 - b = my_0$. Resolver a congruência linear, portanto, relaciona-se à resolução de uma equação diofantina linear da forma $ax - my = b$. Para que a congruência possua solução, Hefez (2006) explica que é necessário que o máximo divisor comum (MDC) de a e m , denotado d , divida b , isto é, $(a, m) \mid b$.

O número de soluções incongruentes da congruência depende desse valor d . Segundo Filho (1981), se d divide b , então a congruência tem exatamente d soluções incongruentes, expressas pela forma $x_0 + \frac{m}{d}k$, para $k = 0, 1, 2, \dots, d - 1$, onde x_0 é uma solução particular. Por exemplo, a congruência $8X \equiv 4, \text{ mod } 12$, tem as soluções 2, 5, 8, 11 no módulo 12. Assim, a solução de uma congruência linear está intimamente ligada à divisibilidade dos coeficientes e à resolução de equações diofantinas lineares.

2.2 O TEOREMA DO RESTO CHINÊS

O Teorema do Resto Chinês, um resultado fundamental na Teoria dos Números, aborda a resolução de sistemas de congruências lineares e exige compreensão prévia do conceito de inverso multiplicativo em aritmética modular. A solução de uma congruência linear da forma $ax \equiv 1 \text{ mod } m$, $\text{mdc}(a, m) = 1$, é chamada de inverso multiplicativo de a módulo m , sendo essencial para manipular sistemas de congruências. Além disso, congruências como $ax \equiv b \text{ mod } m$, podem ser simplificadas para uma forma equivalente $X \equiv c \text{ mod } n$, onde $n = \frac{m}{d}$ e c é determinado por $c = \frac{b'}{d} \cdot a''$, onde a'' o inverso multiplicativo de $\frac{a}{d}$ modulo $= \frac{m}{d}$, quando $d = \text{mdc}(a, m)$ d divide b . Por exemplo, considere a congruência $6X \equiv 2 \text{ mod } 4$. Dividindo todos os termos pelo máximo divisor comum $d = 2$, obtemos $3X \equiv 1 \text{ mod } 2$, cuja solução é $X \equiv 1 \text{ mod } 2$.

O Teorema do Resto Chinês é enunciado para sistemas de congruências lineares simultâneas da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ a_2x \equiv b_1 \pmod{m_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_rx \equiv b_r \pmod{m_r} \end{array} \right.$$

Onde as congruências são independentes, ou seja, $\text{mdc}(m_i, m_j) = 1$ para $i \neq j$, e cada a_i divide b_i , isto é, $a_i, m_i \mid b_i$. De acordo com Hefez (2006), esse sistema de congruências possui uma única solução módulo $N = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_r$, onde N é o produto dos módulos m_i . Para determinar essa solução, o teorema fornece a seguinte fórmula:

$$x = N_1y_1c_1 + N_2y_2c_2 + \dots + N_ry_rc_r$$

Em que $N_i = \frac{N}{m_i}$ para cada $i = 1, 2, 3, \dots, r$, e y_i é a solução da congruência $N_i Y \equiv 1 \pmod{m_i}$, ou seja, y_i é o inverso multiplicativo de N_i módulo m_i . O termo c_i é a solução de cada uma das congruências individuais $a_i x \equiv b_i \pmod{m_i}$.

Essa expressão garante que xxx resolve o sistema simultaneamente, e como a solução é única módulo N , ela pode ser usada para resolver problemas complexos de congruências lineares, como na criptografia e em outras áreas aplicadas da matemática.

Vamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 6x \equiv 2 \pmod{4} \\ 3x \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

A primeira congruência pode ser simplificada para $3X \equiv 1 \pmod{2}$, e a segunda já está em sua forma mais simples. A solução geral para esse sistema é $X \equiv 1 \pmod{2}$, que pode ser encontrada com o Teorema do Resto Chinês e o uso de inversos multiplicativos. Assim, o Teorema do Resto Chinês é uma ferramenta poderosa para resolver sistemas de congruências lineares simultâneas, especialmente com módulos coprimos, garantindo existência e unicidade da solução. Sua aplicação é ampla, abrangendo diversas áreas da matemática e da ciência da computação.

2.2 CLASSES RESIDUAIS

A noção de classes residuais desempenha um papel fundamental na teoria dos números, particularmente no estudo das congruências e suas aplicações computacionais. Esse conceito, amplamente utilizado na aritmética modular, tem relevante contribuição em áreas como a Teoria dos Códigos Corretores de Erros, que se aplica a procedimentos computacionais e tecnológicos (HEFEZ, 2022). As classes residuais permitem a organização dos inteiros em subconjuntos que facilitam operações matemáticas em contextos modulares.

2.3.1 Definição e Propriedades das Classes Residuais.

De acordo com Hefez (2022), uma **classe residual** módulo m é a partição do conjunto $\mathbb{Z}$ em subconjuntos disjuntos, chamados de **classes residuais**. Esses subconjuntos compartilham uma característica em comum: todos os seus elementos deixam o mesmo resto quando divididos por m , onde m é um inteiro positivo maior que 1. Formalmente, a **classe residual** de um elemento $a \in \mathbb{Z}$, $[a]$, é definida como: $[a] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{m}\}$; ou seja, $[a]$ é o conjunto de todos os

inteiros x que são congruentes a a módulo m . O conjunto de todas as classes residuais módulo m é denotado por Z_m , e pode ser expresso como:

$$Z_m = \{[0], [1], [2], \dots, [m-1]\}$$

Cada classe residual tem um **representante** que pertence ao conjunto $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$. Assim, para qualquer $a \in \mathbb{Z}$, há um único $r \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ tal que $[a] = [r]$. Esse representante r é chamado de **resto** da divisão de a por m , confirmando que o conjunto de classes residuais é uma partição completa de $\mathbb{Z}$, e cada a em $\mathbb{Z}$ pode ser associado a uma classe residual única.

2.3.1.1 Operações em Z_m .

No conjunto Z_m , é possível definir operações de adição e multiplicação de classes residuais, da seguinte forma:

- **Adição:** $[a] + [b] = [a + b]$
- **Multiplicação:** $[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$

Essas operações gozam de propriedades que as tornam consistentes com as operações usuais de adição e multiplicação em $\mathbb{Z}$, porém adaptadas ao contexto modular. São elas:

- **Propriedades da Adição:**

Associatividade: $([a] + [b]) + [c] = [a] + ([b] + [c])$

Comutatividade: $[a] + [b] = [b] + [a]$

Existência do elemento neutro (zero): $[0] + [a] = [a]$ para todo $[a] \in Z_m$.

Existência do simétrico (inverso aditivo): $[a] + [-a] = [0]$

- **Propriedades da Multiplicação:**

Associatividade: $([a] \cdot [b]) \cdot [c] = [a] \cdot ([b] \cdot [c])$

Comutatividade: $[a] \cdot [b] = [b] \cdot [a]$

Existência do elemento neutro (um): $[1] \cdot [a] = [a]$ para todo $[a] \in Z_m$.

Distributividade: $[a] \cdot ([b] + [c]) = [a] \cdot [b] + [a] \cdot [c]$

Estas propriedades asseguram que o conjunto Z_m , com as operações de adição e multiplicação definidas, forma um **anel**, denominado **Anel das Classes Residuais Módulo m** . Esse anel é uma estrutura algébrica com várias aplicações em diversas áreas da matemática e da computação, especialmente na criptografia, sistemas de numeração e teoria dos códigos.

2.3.2 Aplicações das Classes Residuais

As classes residuais possuem amplas aplicações práticas, como na Teoria dos Códigos Corretores de Erros, onde congruências e classes residuais auxiliam na detecção e correção de erros em sistemas de transmissão de dados, e em algoritmos de criptografia, como o RSA, onde a aritmética modular é essencial para o processamento seguro de informações. Com sua simplicidade e estrutura, as classes residuais permitem transformar problemas complexos em cálculos aritméticos simples, que podem ser eficientemente processados por algoritmos modulares.

Além disso, as classes residuais são a base da aritmética modular, desempenhando um papel central na teoria dos números e com implicações práticas em diversas áreas da matemática aplicada. A estrutura algébrica de Z_m , com suas operações e propriedades, permite simplificações significativas no estudo de congruências, contribuindo para o desenvolvimento de métodos úteis em computação e tecnologia.

2.4 CLASSE RESIDUAL INVERTÍVEL

Na aritmética modular, o conceito de **classe residual invertível** é fundamental para a resolução de equações lineares em Z_m . A inversibilidade de um elemento em Z_m está diretamente ligada à noção de máximo divisor comum (mdc) entre o representante da classe e o módulo m .

2.4.1 Definição de Classe Residual Invertível

Um elemento $[a] \in Z_m$ é dito **invertível** se existe $[b] \in Z_m$ tal que: $[a] \cdot [b] = [1]$; neste caso, $[b]$ é chamado de **inverso multiplicativo** de $[a]$ módulo m . A existência de um inverso para $[a]$ é crucial para a resolução de congruências lineares do tipo $ax \equiv b \pmod{m}$, que, no contexto das classes residuais, pode ser reescrita como: $[a] \cdot Z = [b]$. Para resolver essa equação, é necessário verificar se $[a]$ é invertível em Z_m , o que garante que Z pode ser encontrado multiplicando $[b]$ pelo inverso de $[a]$.

2.4.1.1 Proposição: Critério de Inversibilidade

A proposição fundamental sobre a inversibilidade em Z_m estabelece que, os elementos $[a] \in Z_m$ são invertíveis se, e somente se, o máximo divisor comum $\text{mdc}(a, m) = 1$, ou seja, a e m são **coprimos**.

Essa proposição mostra que a condição para que um elemento de Z_m tenha um inverso é que ele seja relativamente primo ao módulo m . Esse resultado é de extrema importância na resolução de equações modulares, pois, ao garantir a existência de um inverso multiplicativo, torna-se possível resolver congruências lineares de forma algébrica.

2.4.1.2 Corolário: Inversibilidade em Z_p .

Como consequência da proposição anterior, pode-se derivar o seguinte corolário. Se $p \in \mathbb{Z}$ é um número primo, então **todos os elementos não nulos** de Z_p são invertíveis. Em outras palavras, no conjunto Z_p , onde p é um número primo, todos os elementos $[a] \in Z_p$, com $a \neq 0$, possuem um inverso. Isso ocorre porque, para p primo, qualquer inteiro $a \neq 0$ tem $\text{mdc}(a, p) = 1$, o que assegura a inversibilidade de todos os elementos diferentes de zero.

3 APLICAÇÕES DA ARITMÉTICA NO EXAME NACIONAL DE QUALIFICAÇÃO (ENQ)

Esta seção aborda teorias fundamentais da aritmética, enfocando propriedades e operações com números inteiros, essenciais para a aplicação em matemática, computação e tecnologia. Explorar esses temas fortalece a formação matemática dos estudantes, fornecendo subsídios teóricos e práticos para resolver problemas complexos, como aritmética modular, congruências e equações diofantinas. Esse conhecimento é vital para exames de qualificação, como o Exame Nacional de Qualificação, e para a pesquisa acadêmica, promovendo uma base sólida em teoria dos números e estimulando o pensamento matemático crítico e analítico.

Aplicação 1: Resolução da Congruência $17x \equiv 82, (\text{mod } 165)$ (ENQ-2022.2):

Para resolver a congruência $17x \equiv 82 \pmod{165}$, utilizamos o fato de que $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$. O objetivo é encontrar $x \in \mathbb{Z}$ tal que satisfaça essa congruência. Inicialmente, escrevemos a congruência na forma de equação diofantina associada: $17x - 165y = 82$, onde x e y são inteiros. Para resolver essa equação, primeiro calculamos o máximo divisor comum (mdc) entre 17 e 165 utilizando o algoritmo de Euclides: $\text{mdc}(17, 165) = 1$. A seguir, aplicamos o algoritmo da substituição retroativa para expressar o mdc como uma combinação linear de 17 e 165. A decomposição é feita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2 \cdot (12 - 2 \cdot 5), \quad 1 = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 12, \\ 1 &= 5 \cdot (17 - 1 \cdot 12) - 2 \cdot 12, \quad 1 = (-7) \cdot 12 + 5 \cdot 17, \\ 1 &= (-7) \cdot (165 - 9 \cdot 17) + 5 \cdot 17 \end{aligned}$$

Assim, temos: $1 = 68 \cdot 17 + (-7) \cdot 165$. Multiplicando ambos os lados por 82, para ajustar à equação $17x - 165y = 82$, obtemos: $82 = 17 \cdot (68 \cdot 82) - 165 \cdot (7 \cdot 82)$, o que nos dá uma solução particular para x é $x = 68 \times 82 = 5576$. Agora, encontramos a solução módulo 165, $x \equiv$

$5576 \pmod{165}$. Dividindo 5576 por 165, encontramos que $5576 \equiv 131 \pmod{165}$. Portanto, a solução geral da congruência é $x \equiv 131 \pmod{165}$. Assim, $x = 131$ é a solução da congruência $17x \equiv 82 \pmod{165}$.

Aplicação 2: Resolução de Sistema de Congruências Utilizando o Teorema Chinês dos Restos:

Determine um número inteiro entre 1200 e 1400 que deixa restos 2 e 6 quando dividido, respectivamente, por 11 e 13. (ENQ-2020.1).

Neste problema, busca-se determinar um número inteiro x no intervalo $1200 < x < 1400$, que satisfaça o seguinte sistema de congruências:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{11} \\ x \equiv 6 \pmod{13} \end{cases}$$

Como $\text{mdc}(11, 13) = 1$, ou seja, 11 e 13 são primos entre si, podemos aplicar o Teorema Chinês dos Restos para encontrar a solução geral desse sistema.

Passo 1: Determinar os Módulos e os Multiplicadores. Primeiramente, definimos:

$M = 11 \cdot 13 = 143$, $M_1 = \frac{M}{11} = 13$, $M_2 = \frac{M}{13} = 11$. A solução geral é dada pela fórmula: $x = M_1 y_1 c_1 + M_2 y_2 c_2$, onde $c_1 = 2$ e $c_2 = 6$ são os restos do sistema, e y_1 e y_2 são as soluções das congruências: $M_1 y_1 \equiv 1 \pmod{11}$ e $M_2 y_2 \equiv 1 \pmod{13}$.

Passo 2: Resolver as Congruências para y_1 e y_2 .

- a) Para $M_1 y_1 \equiv 1 \pmod{11}$, temos: $13y_1 \equiv 1 \pmod{11}$. Reduzindo 13 mod 11, obtemos $2y_1 \equiv 1$. A solução dessa congruência é $y_1 = 6$, pois $2 \cdot 6 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$.
- b) Para $M_2 y_2 \equiv 1 \pmod{13}$, temos: $11y_2 \equiv 1 \pmod{13}$. Reduzindo 11 mod 13, obtemos $-2y_2 \equiv 1 \pmod{13}$, que equivale a $2y_2 \equiv -1 \pmod{13}$. Multiplicando ambos os lados por 6 (inverso de 2 módulo 13), obtemos $y_2 = 6$.

Passo 3: Substituir na Fórmula da Solução Geral. Substituindo os valores de y_1 , y_2 , c_1 , e c_2 na fórmula da solução geral: $x = 13 \cdot 6 \cdot 2 + 11 \cdot 6 \cdot 6 = 156 + 396 = 552$. Logo, a solução geral é: $x \equiv 552 \pmod{143}$, ou seja, $x = 143t + 552$, para $t \in \mathbb{Z}$.

Passo 4: Encontrar x no intervalo $1200 < x < 1400$. Agora, precisamos determinar t tal que $1200 < x < 1400$. Para isso, resolvemos: $1200 < 143t + 552 < 1400$. Subtraindo 552 de todos os lados: $648 < 143t < 848$. Dividindo por 143: $4,53 < t < 5,93$. Logo, $t = 5$. Substituindo $t = 5$ na equação $x = 143t +$

$552x = 143t + 552$: $x = 143 \cdot 5 + 552 = 715 + 552 = 1267$. Portanto, a solução é $x = 1267$. Esse número satisfaz as condições do problema, pois $1200 < 1267 < 1400$, e ele resolve o sistema de congruências dado.

Aplicação 3: Elementos Invertíveis em Z_{24} (PROVA NACIONAL 2012):

Parte a: Determinação dos Elementos Invertíveis em Z_{24} . Para determinar os **elementos invertíveis** em Z_{24} , buscamos os elementos $[a]$ tal que $\text{mdc}(a, 24) = 1$, ou seja, os elementos $a < 24$ que são coprimos com 24. Os divisores de 24 são 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Portanto, os números menores que 24 e coprimos com 24 são: 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

Assim, os elementos invertíveis em Z_{24} são: $[1]$, $[5]$, $[7]$, $[11]$, $[13]$, $[17]$, $[19]$ e $[23]$. Agora, devemos verificar se cada um desses elementos é seu próprio inverso, ou seja, se $[a]^2 \equiv 1 \pmod{24}$. Vamos calcular:

$$1^2 = 1 \equiv 1 \pmod{24}, 5^2 = 25 \equiv 1 \pmod{24},$$

$$7^2 = 49 = 2 \cdot 24 + 1 \equiv 1 \pmod{24}, 11^2 = 121 = 5 \cdot 24 + 1 \equiv 1 \pmod{24},$$

$$13^2 = 169 = 7 \cdot 24 + 1 \equiv 1 \pmod{24}, 17^2 = 289 = 12 \cdot 24 + 1 \equiv 1 \pmod{24},$$

$$19^2 = 361 = 15 \cdot 24 + 1 \equiv 1 \pmod{24}, 23^2 = 529 = 22 \cdot 24 + 1 \equiv 1 \pmod{24}.$$

Portanto, cada elemento invertível de Z_{24} é de fato o seu próprio inverso, ou seja, $[a]^2 = [1]$ para $a = 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$.

Parte b: Soma de Todos os Elementos Invertíveis de Z_{24} . Agora, calculamos a soma de todos os elementos invertíveis de Z_{24} : $[1] + [5] + [7] + [11] + [13] + [17] + [19] + [23]$. Somando diretamente, obtemos: $1 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 = 96$. Como $96 = 4 \cdot 24$, temos que, $[96] \equiv [0] \pmod{24}$. Portanto, a soma de todos os elementos invertíveis de Z_{24} é $[0]$.

Parte c: Produto de Todos os Elementos Invertíveis de Z_{24} . Por fim, calculamos o produto de todos os elementos invertíveis de Z_{24} : $[1] \cdot [5] \cdot [7] \cdot [11] \cdot [13] \cdot [17] \cdot [19] \cdot [23]$. Agrupamos os termos, $[5] \cdot [7] = [11]$, $[13] \cdot [17] = [5]$, $[19] \cdot [23] = [5]$.

Agora, multiplicamos os resultados, $[1] \cdot [11] \cdot [5] \cdot [5] = [1]$. Portanto, o produto de todos os elementos invertíveis de Z_{24} é $[1]$.

Aplicação 4: Resolução de Congruências Modulares (ENQ-2012.1):

Parte b: Encontrar as Soluções Mínimas para as Congruências. Aqui, devemos encontrar as soluções mínimas Y para três diferentes congruências da forma $aY \equiv 1 \pmod{m}$, onde a e m são inteiros, utilizando o conceito de **inverso multiplicativo** em aritmética modular.

- a)** $110Y \equiv 1 \pmod{9}$. Primeiramente, reduzimos o coeficiente 110 módulo 9, $110 \equiv 110 \pmod{9} = 110 - 12 \cdot 9 = 110 - 108 = 2$. Assim, a congruência original se torna, $2Y \equiv 1 \pmod{9}$. Agora, precisamos encontrar o inverso de 2 módulo 9. Sabemos que $\text{mdc}(2, 9) = 1$, então 2 é invertível. Podemos resolver a congruência $2Y \equiv 1 \pmod{9}$, testando valores de Y , ou aplicando o **algoritmo da substituição retroativa**. A solução é $Y = 5$, pois, $2 \cdot 5 = 10 \equiv 1 \pmod{9}$. Logo, a solução geral é, $Y = 5 + 9t, t \in \mathbb{Z}$. A solução mínima é $Y_{\min} = 5$.
- b)** $99Y \equiv 1 \pmod{10}$. Reduzimos 99 módulo 10, $99 \equiv 99 \pmod{10} = 99 - 9 \cdot 10 = 99 - 90 = 9$. Assim, a congruência original se torna, $9Y \equiv 1 \pmod{10}$. Precisamos encontrar o inverso de 9 módulo 10. Sabemos que $\text{mdc}(9, 10) = 1$, então 9 é invertível. A solução é $Y = 9$, pois, $9 \cdot 9 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$. Logo, a solução geral é, $Y = 9 + 10t, t \in \mathbb{Z}$. A solução mínima é $Y_{\min} = 9$.
- c)** $90Y \equiv 1 \pmod{11}$. Reduz-se 90 módulo 11, $90 \equiv 90 \pmod{11} = 90 - 8 \cdot 11 = 90 - 88 = 2$. Assim, a congruência original se torna, $2Y \equiv 1 \pmod{11}$. Precisamos encontrar o inverso de 2 módulo 11. Sabemos que $\text{mdc}(2, 11) = 1$, então 2 é invertível. A solução é $Y = 6$, pois, $2 \cdot 6 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$. Logo, a solução geral é, $Y = 6 + 11t, t \in \mathbb{Z}$. A solução mínima é $Y_{\min} = 6$.

4 CONCLUSÃO

A resolução de congruências lineares e a análise dos elementos invertíveis na aritmética modular são fundamentais na teoria dos números, servindo como base para resolver problemas práticos em áreas como sistemas de congruências e o cálculo de inversos multiplicativos. Essas técnicas são essenciais em exames de qualificação, como o ENQ, e têm um papel relevante em criptografia e teoria dos códigos. Este artigo discute a importância da aritmética modular em contextos acadêmicos e tecnológicos, destacando o Teorema Chinês dos Restos, que permite soluções únicas para sistemas de congruências simultâneas com múltiplos módulos coprimos, além da manipulação de inversos modulares, facilitando a resolução de congruências complexas.

Nos anéis Z_m , o estudo dos elementos invertíveis revela propriedades estruturais essenciais, como a existência de inversos multiplicativos, determinada pelo máximo divisor comum, o que é crucial na resolução de equações modulares. Em anéis como Z_{24} , onde os elementos invertíveis são seus próprios inversos, operações modulares tornam-se mais eficientes,

aplicáveis à criptografia de chaves públicas. A análise das operações de soma e produto em Z_{24} mostra propriedades como soma igual a zero e produto igual a um, úteis na teoria de grupos e na segurança da informação, destacando a relevância da aritmética modular.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, Edgar de. Teoria Elementar dos Números. 3ª ed. São Paulo: Nobel, 1988.

BRASIL, Exame Nacional de Qualificação. PROFMAT. Disponível em ><https://profmatsbm.org.br/exame-nacional-de-qualificacao/><.

HEFEZ, Abramo. Elementos de Aritmética (Série Textos Universitários): Sociedade Brasileira de Matemática, 2006, p.170.

FILHO, J. P. *Introdução à Teoria dos Números*. IMPA, 1981.

HEFEZ, Abramo. Aritmética (Coleção Profmat) – 3ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

SANTOS, J. P. O. Introdução à Teoria dos Números – 3ª ed. Rio de Janeiro: IMPA-SBM, 1998. v. 1, p. 198.

RACIONALIDADE EM $\mathbb{Q}_p$
 Crossref  10.56238/livrosindi202535-036

Carolina Aiko Kaneko

E-mail: carolina.kaneko@icen.ufpa.br

RESUMO

No final do século 19, o matemático Kurt Hensel introduziu o conceito de números p -ádicos, criando um novo campo na Teoria dos Números como uma alternativa aos números reais para resolver problemas mais complexos. Todos os números p -ádicos podem ser representados como uma série de potências com base em um primo p , chamada de *expansão p -ádica canônica*. Neste trabalho, ilustramos essa ideia ao resolver uma equação modular quadrática, mostrando que as soluções formam uma sequência infinita de números inteiros, que convergem para um único número p -ádico. O resultado principal do trabalho utiliza a expansão p -ádica canônica para caracterizar a racionalidade de um número: se sua expansão for periódica, o número é racional; caso contrário, ele é irracional. Após enunciar o resultado, apresentamos sua demonstração utilizando ferramentas da Teoria dos Números e as definições desenvolvidas ao longo do trabalho. Na conclusão, discutimos a importância do estudo dos números p -ádicos e um problema em aberto da área.

Palavras-chave: Teoria dos Números, Números p -ádicos, Números racionais, Solução de equações modulares, Sequências.

1 INTRODUÇÃO

No final do século 19, um matemático alemão chamado Kurt Hensel sugeriu outra abordagem para desafios na Teoria dos Números: o conjunto dos *números p -ádicos*. Hensel deu início a um novo campo de estudo, que permite resolver os mesmos problemas por outro viés, sendo uma alternativa para problemas complexos na perspectiva dos números reais. A seguir, introduziremos, de maneira intuitiva, ao conjunto dos números p -ádicos, e apresentaremos um resultado da área que permite caracterizar os números racionais a partir dos números p -ádicos. Em seguida, demonstraremos o teorema, e na conclusão, discutiremos brevemente sobre possíveis aplicações.

2 DESENVOLVIMENTO

Imagine que queremos encontrar os valores de x que são soluções para as equações modulares da forma

$$x^2 \equiv 2 \pmod{7^n} \quad (1)$$

Para $n = 1$, podemos apenas testar para os elementos do conjunto $\{0, 1, \dots, 6\}$; e obtemos a solução $x \equiv \pm 3 \pmod{7}$. Denotaremos esta primeira solução por x_1 . Então, sabemos que $x_1 = 7a_1 + 3$ (também seria possível tomar $x_1 = 7a_1 + 4$), e substituindo x_1 em (1), para $n = 2$;

$$x_1^2 \equiv (7a_1 + 3)^2 \equiv 2 \pmod{7^2} \Rightarrow a_1 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Desse modo, desde que $a_1 \equiv 1 \pmod{7}$, $x_1 \equiv 7 \cdot 1 + 3 \pmod{7^2}$ é uma solução para a equação (1) quando $n = 2$.

De maneira análoga, seja $x_2 = 7^2 \cdot a_2 + 7 \cdot 1 + 3$. Pela mesma construção, temos $x_2 \equiv 7^2 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 3 \pmod{7^3}$ como solução de (1) se $n = 3$. Percebe-se então, que obtemos uma sequência infinita de inteiros

$$\begin{array}{ll} x_0 & 3; \\ x_1 & 7 \cdot 1 + 3; \\ x_2 & 7^2 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 3; \end{array} = 7^{n+1} \cdot a_{n+1} + x_n$$

que denotaremos por $\{x_k\}_{k \geq 0} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, onde seus termos satisfazem

$$\begin{array}{ll} x_0 & \equiv 3 \pmod{7}; \\ x_n & \equiv x_{n-1} \pmod{7^n}; \\ x_n^2 & \equiv 2 \pmod{7^{n+1}}; \end{array}$$

para todo n . Ou seja, podemos representar a solução x como

$$x = a_0 + 7 \cdot a_1 + 7^2 \cdot a_2 + \dots + 7^n \cdot a_n + \dots.$$

A partir de um processo semelhante ao que realizamos, Hensel descobriu um conjunto de números que ele chamou de *números p -ádicos*. Hensel conseguiu mostrar que encontrar os valores de x que solucionam equações como (1), é equivalente a resolver a equação nos números p -ádicos. Segue então a definição do conjunto.

Seja p um primo qualquer. O conjunto dos *racionais p -ádicos*, ou $\mathbb{Q}_p$, é o conjunto das séries de potência em p . Ou seja, um número α pertence a $\mathbb{Q}_p$ se e somente se

$$\alpha = a_{-N}p^{-N} + \dots + a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots = \sum_{i=-N}^{\infty} a_i p^i,$$

onde $0 \leq a_i \leq p - 1$, para todo $i \geq -N$ com N sendo um inteiro positivo. Essa representação de α é única, e chamamos de *expansão p -ádica canônica*. Desse modo, se dois números em $\mathbb{Q}_p$ possuem a mesma expansão, estes são o mesmo número. Além disso, se j é o menor índice i para o qual $a_i \neq 0$, e j é maior ou igual a zero, dizemos que α é *inteiro p -ádico*. Denotamos o conjunto dos inteiros p -ádicos por $\mathbb{Z}_p$.

Note que os números p -ádicos como definimos estão intrinsecamente relacionados a sequências como a apresentada para a solução de (1). Dada uma sequência de inteiros $\{x_k\}_{k \geq 0}$ que satisfaz

- $0 \leq x_n \leq p^n - 1$;
- $x_{n+1} \equiv x_n \pmod{p^n}$;

existe um único número p -ádico α tal que $\alpha \equiv x^n \pmod{p^n}$ para todo $n \geq 1$.

Observe que os números p -ádicos formam um conjunto muito diferente dos números reais. Então, para medir distâncias entre esses números, é razoável que utilizemos um valor absoluto diferente do usual; chamado *valor absoluto p -ádico*.

Seja α um número p -ádico, tal que $\sum_{i=-N}^{\infty} a_i p^i$ seja a expansão canônica p -ádica de α . A *valoração p -ádica* de α , ou $v_p(\alpha)$, é dada por $v_p(\alpha) = \min\{i \geq -N; a_i \neq 0\}$. A partir da valoração p -ádica de α , definimos o *valor absoluto p -ádico* de α , ou $|\alpha|_p$, como $|\alpha|_p = p^{-v_p(\alpha)}$.

Exemplo: A expansão p -ádica canônica de -1 é da forma $-1 = (p - 1)(1 + p + p^2 + p^3 + \dots) = \sum_{i=0}^{\infty} (p - 1) p^i$, para todo p . Além disso, -1 é um inteiro p -ádico, pois o menor índice para o qual $a_i \neq 0$ é $i = 0$. Desse modo, $v_p(-1) = 0$, e $|-1|_p = 1$.

Nos números reais, sabemos que um número é racional se e somente pode ser representado como uma série periódica de potências de base 10. Existe um resultado semelhante nos p -ádicos, que permite caracterizar a racionalidade de um número a partir a sua expansão p -ádica canônica. Segue abaixo o enunciado e sua demonstração.

Teorema: Um número x que pertence a $\mathbb{Q}_p$ possui uma expansão p -ádica canônica periódica se, e somente se, x for racional.

Demonstração: Seja $x \in \mathbb{Q}_p$. Sabemos que sua expansão p -ádica canônica é da forma

$$x = \sum_{i=-N}^{\infty} a_i p^i,$$

onde $0 \leq a_i \leq p - 1$ para todo $i \geq -N$, com N sendo um inteiro positivo. Podemos multiplicar x por p^N e, se necessário, somar um número racional de modo a considerar apenas a parte inteira de x . Isso não altera a racionalidade de x , então, sem perda de generalidade, podemos assumir que $x \in \mathbb{Z}_p$, cuja expansão p -ádica canônica é

$$x = \sum_{i \geq 0} a_i p^i, \quad 0 \leq a_i \leq p - 1.$$

Se a expansão de x é periódica, com período de comprimento k , então

$$x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_k p^{k-1} + a_0 p^k + \cdots + a_1 p^{k+1} + \cdots$$

o que pode ser reescrito como

$$x = (a_0 + a_1 p + \cdots + a_k p^{k-1})(1 + p^k + p^{2k} + \cdots).$$

Como $1 + p^k + p^{2k} + \cdots$ é uma série geométrica de razão p^k , obtemos

$$x = (a_0 + a_1 p + \cdots + a_k p^{k-1}) \cdot \frac{1}{1 - p^k},$$

que é um número racional. Portanto, se a expansão p -ádica canônica de x é periódica, então x é racional.

Agora, seja $x = \frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros com $b \neq 0$ e $\text{mdc}(b, p) = 1$. Queremos mostrar que a expansão p -ádica canônica de $\frac{a}{b}$ é periódica. Como b e p são coprimos, b e p^n também são coprimos para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Assim, existem inteiros c_n e d_n tais que

$$c_n b + d_n p^n = 1 \Rightarrow ac_n b + ad_n p^n = a. \quad (\text{I})$$

Definindo $A_n = ac_n + p^n k$, com k tal que $0 \leq A_n \leq p^n - 1$, obtemos de (i) que

$$a = \frac{ac_n b + ad_n p^n}{A_n b + p^n(ad_n - bk)}.$$

Então, para todo A_n , existe um $r_n = ad_n - bk$ tal que

$$A_n + \frac{r_n}{b} p^n = \frac{a}{b}. \quad (\text{II})$$

Observando que $0 \leq A_n \leq p^n - 1$ e de (ii) temos $r_n = \frac{a - A_n b}{p^n}$. Quando $n \rightarrow \infty$, a sequência r_n é finita, e a igualdade (ii) é válida para todo n . Portanto,

$$\frac{a}{b} = A_n + \frac{r_n}{b} p^n = A_{n+1} + \frac{r_{n+1}}{b} p^{n+1}.$$

Manipulando a igualdade, obtemos

$$A_n - A_{n+1} = \frac{p^n(pr_{n+1} - r_n)}{b}. \quad (\text{III})$$

Como $\text{mdc}(p^n, b) = 1$, temos que $A_n \equiv A_{n+1} \pmod{p^n}$, de modo que $A_{n+1} = A_n + x_n p^n$ para $0 \leq x_n \leq p - 1$. Substituindo em $A_n + \frac{r_n}{b} p^n = A_{n+1} + \frac{r_{n+1}}{b} p^{n+1}$, obtemos $r_n = x_n b + p r_{n+1}$. Já que r_n assume uma quantidade finita de valores, para algum índice de m , teremos $r_m = r_{m+k}$, para algum k inteiro. Então;

$$r_m = r_{m+k} \Rightarrow x_m b + p r_{m+1} = x_{m+k} b + p r_{m+k+1}. \quad (\text{IV})$$

Daí,

$$x_m b - x_{m+k} b = p r_{m+k+1} - p r_{m+1} \Rightarrow b(x_m - x_{m+k}) = p(r_{m+k+1} - r_{m+1}).$$

Desse modo, concluímos que $x_m = x_{m+k}$, e é possível mostrar pelo Princípio de Indução Finita que de fato, $x_n = x_{n+k}$ para todo $n \geq m$.

Note que, a sequência $\{A_n\}_{n \geq 0}$ é uma sequência de inteiros tal que $0 \leq A_n \leq p^n - 1$ e $A_n \equiv A_{n+1} \pmod{p^n}$, onde $A_n \equiv \frac{a}{b} \pmod{p^n}$. Daí, pela proposição já apresentada, $\frac{a}{b}$ é, de fato, o único número p -ádico associado a esta sequência, o que permite concluir que a sequência $\{x_n\}_{n \geq 0}$ é a sequência de coeficientes da expansão p -ádica canônica de $\frac{a}{b}$. Como demonstramos que a sequência $\{x_n\}_{n \geq 0}$ possui período de comprimento k , a expansão p -ádica canônica de $\frac{a}{b}$ também é periódica, como queríamos demonstrar.

3 CONCLUSÃO

Através do resultado apresentado, é possível caracterizar a racionalidade de um número de maneira bastante simples: para mostrar que um número p -ádico α é irracional, basta mostrar que sua expansão p -ádica canônica é não periódica, para qualquer primo p . No entanto, no estudo de números p -ádicos, existem problemas um pouco mais complexos, envolvendo a racionalidade de números. Em (SHICKHOF, 1984, p. 17) [5], o autor apresenta o número $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} k^i$, com $k \geq 2$ inteiro. Apesar de ser possível mostrar que α não pode ser racional em $\mathbb{Q}_p$ para todo primo p , ainda não se sabe se α é, de fato, irracional em $\mathbb{Q}_p$ para todo primo. Alguns pesquisadores já se debruçaram sobre o caso, mas o problema permanece em aberto há 40 anos, o que evidencia a complexidade e a importância deste campo.

REFERÊNCIAS

BOREVICH, Z. I.; SHAFAREVICH, I. R. *Number theory*. New York: Academic Press, 1973.

GOUVÊA, F. Q. *p-adic numbers: an introduction*. 3. ed. Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2020.

KATOK, S. *p-adic analysis compared with real*. Providence: American Mathematical Society, 2007. (Student Mathematical Library, v. 37).

MURTY, M. *Introduction to p-adic analytic number theory*. Providence: American Mathematical Society; International Press, 2002. (Studies in Advanced Mathematics, v. 27).

SCHIKHOF, W. H. *Ultrametric calculus: an introduction to p-adic analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1984. (v. 4).

SHOKRANIAN, S.; SOARES, M.; GODINHO, H. *Teoria dos números*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1994.

HOMOTOPIA E CLASSIFICAÇÃO DO MCG DO TORO

 Crossref  10.56238/livrosindi202535-037
Edwin Soeiro Silva

E-mail: edwin.silva@icen.ufpa.br

Marcel Vinhas Bertolini

E-mail: marcelvb@ufpa.br

RESUMO

Neste trabalho, estudamos as classes de homotopia de aplicações contínuas do toro em si mesmo, utilizando técnicas fundamentais de teoria de homotopia e do grupo fundamental, além de estender a teoria de grau de aplicações do círculo. Introduzimos uma aplicação sobrejetiva $D: \mathcal{C}^0(T^2) \rightarrow M_2(\mathbb{Z})$, a qual associa a cada aplicação contínua uma matriz que caracteriza sua classe de homotopia, preservando a composição dessas aplicações pela multiplicação das matrizes associadas. Demonstramos também que uma aplicação do toro sobre si mesmo é homotópica a um homeomorfismo se, e somente se, a matriz associada à aplicação for invertível. Ao definir os twists de Dehn, demonstramos que o grupo de automorfismos do toro, $MCG(T^2)$, é gerado por esses twists, utilizando as propriedades de D , matrizes inteiras e divisibilidade. Finalmente, enunciamos um teorema de classificação de classes de homotopia do toro, classificando-as em redutíveis, periódicas ou Anosov. Este trabalho faz parte de um projeto de iniciação científica orientado pelo professor Marcel Vinhas Bertolini (UFPA).

Palavras-chave: Toro, Homotopia, Teoria de grau, MCG.

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, abordamos a classificação do grupo modular do toro T^2 utilizando técnicas fundamentais da teoria de Homotopia. Especificamente, estendemos a teoria de grau de aplicações do círculo S^1 , conforme apresentada em [1], para o contexto do toro. A partir dessa extensão, exploramos a estrutura do grupo modular $MCG(T^2)$, utilizando ferramentas topológicas desenvolvidas ao longo desse processo, juntamente com resultados algébricos e os twists de Dehn, mostramos que o grupo modular do toro é isomorfo ao grupo linear especial $SL(2, \mathbb{Z})$. Além disso, procedemos para a classificação dos elementos de $MCG(T^2)$, distinguindo-os como redutíveis, periódicos ou Anosov.

A metodologia adotada neste trabalho consiste em enunciar e demonstrar uma série de proposições. Na primeira parte, abordamos a construção da noção de grau no toro, explorando algumas de suas implicações. Na segunda parte, definimos os twists de Dehn, e apresentamos resultados algébricos que permitem identificar o grupo modular $MCG(T^2)$ com $SL(2, \mathbb{Z})$ e, por fim, classificamos seus elementos.

2 HOMOTOPIA E CLASSIFICAÇÃO DO MCG DO TORO

2.1 TEORIA DE GRAU NO TORO

No contexto de aplicações do S^1 temos um grau bem definido, i.e, uma aplicação $deg: C^0(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$, que mede a quantidade de voltas que uma aplicação do círculo dá sobre si mesmo. Formalmente, definimos o grau como :

Definição 1: Consideremos a aplicação de recobrimento $\epsilon: \mathbb{R} \rightarrow S^1, x \mapsto e^{2\pi ix}$, um laço $f: I \rightarrow S^1$ e $\tilde{f}: I \rightarrow \mathbb{R}$ um levantamento de f . Definimos o grau de f como $deg(f) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$.

Para essa aplicação, valem as propriedades functoriais:

Proposição 1: Dadas aplicações $\varphi, \psi \in C^0(S^1)$, valem:

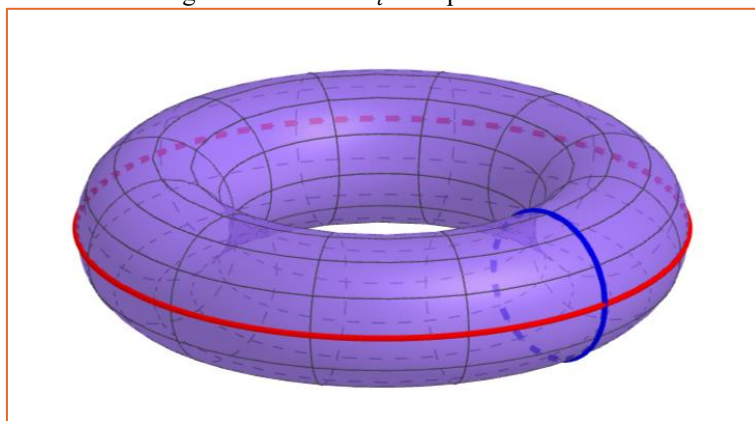
$$\begin{aligned} \varphi \simeq \psi &\Leftrightarrow deg(\varphi) = deg(\psi) \\ deg(\varphi \circ \psi) &= deg(\varphi) \cdot deg(\psi) \end{aligned}$$

Estenderemos essa noção de grau para T^2 , de modo que essas propriedades permaneçam válidas nesse contexto. Para tal, das aplicações do toro, extrairemos quatro aplicações do S^1 e definiremos uma matriz de grau como segue abaixo:

Definição 2: Sejam $\Omega_1: I \rightarrow T^2, x \mapsto (e^{2\pi ix}, 1)$ e $\Omega_2: I \rightarrow T^2, x \mapsto (1, e^{2\pi ix})$. Definimos a aplicação de grau no toro por $D: C^0(T^2) \rightarrow M_2(\mathbb{Z})$ por: $D(\varphi)_{ij} = deg((\varphi \circ \Omega_j)_i)$

As curvas Ω_i podem ser visualizadas na superfície do toro na imagem 1, onde as curvas azul e vermelha correspondem, respectivamente, a Ω_1 e Ω_2 .

Figura 1 – Curvas Ω_i na superfície do toro



Fonte: Imagem feita pelo autor

De maneira análoga à proposição 1, temos:

Proposição 2: Dadas aplicações $\varphi, \psi \in C^0(T^2)$, valem:

$$\begin{aligned} \varphi \simeq \psi &\Leftrightarrow D(\varphi) = D(\psi) \\ D(\varphi \circ \psi) &= D(\varphi) \cdot D(\psi) \end{aligned}$$

Demonstração (primeira equivalência): Suponhamos $\varphi \simeq \psi$. Assim, utilizando propriedades de homotopia e do grau no círculo (proposição 1): $\varphi \circ \Omega_j \simeq \psi \circ \Omega_j \Rightarrow (\varphi \circ \Omega_j)_i \simeq (\psi \circ \Omega_j)_i \Rightarrow D(\varphi)_{ij} = D(\psi)_{ij}$. Reciprocamente, se as aplicações não são homotópicas, alguma das entradas da matriz será diferente.

Proposição 3: *Seja $f \in C^0(T^2)$. O homomorfismo induzido tem a propriedade: $f_*([\Omega_i]) = [\Omega_1^{D(f)_{1i}} \cdot \Omega_2^{D(f)_{2i}}], i \in \{1, 2\}$.*

Demonstração: Consideramos a aplicação de recobrimento, $\pi: R^2 \rightarrow T^2, \pi = \epsilon \times \epsilon$, e $\tilde{f}$ um levantamento de $f: I \rightarrow T^2$. Como R^2 é simplesmente conexo e $\tilde{f}(\Omega_i)$ tem ponto inicial em $(0,0)$ e final em $(D(f)_{1i}, D(f)_{2i})$, existe uma homotopia entre $\tilde{f}(\Omega_i)$ e o caminho γ que percorre os catetos do triângulo retângulo no plano com ângulo reto em $(D(f)_{1i}, 0)$. Dessa forma:

$$f_*([\Omega_i]) = [\pi(\tilde{f}(\Omega_i))] = \pi_*([\tilde{f}(\Omega_i)]) = [\Omega_1^{D(f)_{1i}} \cdot \Omega_2^{D(f)_{2i}}].$$

Demonstração (segunda equivalência). Sejam $\varphi, \psi \in C^0(T^2)$. Então:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)_*([\Omega_i]) &= \psi_*(\varphi_*([\Omega_i])) \\ &= \psi_*[\Omega_1^{D(\varphi)_{1i}} \cdot \Omega_2^{D(\varphi)_{2i}}] \\ &= \psi_*[\Omega_1^{D(\varphi)_{1i}}] \cdot \psi_*[\Omega_2^{D(\varphi)_{2i}}] \\ &= [\Omega_1^{D(\psi)_{11}D(\varphi)_{1i}} \cdot \Omega_2^{D(\psi)_{21}D(\varphi)_{1i}}] \cdot [\Omega_1^{D(\psi)_{12}D(\varphi)_{2i}} \cdot \Omega_2^{D(\psi)_{22}D(\varphi)_{2i}}] \\ &= [\Omega_1^{D(\psi)_{11}D(\varphi)_{1i} + D(\psi)_{12}D(\varphi)_{2i}} \cdot \Omega_2^{D(\psi)_{21}D(\varphi)_{1i} + D(\psi)_{22}D(\varphi)_{2i}}] \end{aligned}$$

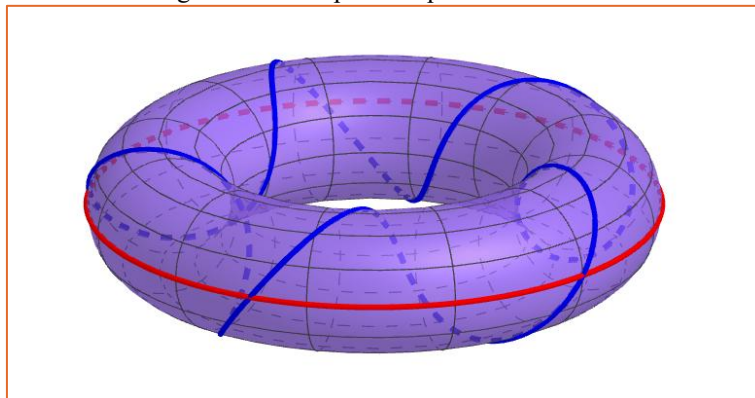
Pela proposição 3 e a primeira equivalência, concluímos o que desejamos, já que a matriz terá entradas correspondentes ao produto das matrizes.

Agora que já foi estabelecida a aplicação de grau e suas propriedades functoriais foram verificadas e sabemos que a aplicação é bem comportada sobre as classes de homotopia, podemos escolher um representante padrão para essas classes.

Definição 3: *O representante linear da classe $[\varphi]$ é a aplicação dada por $(z_1, z_2) \mapsto (z_1^{D(\varphi)_{11}} z_2^{D(\varphi)_{12}}, z_1^{D(\varphi)_{21}} z_2^{D(\varphi)_{22}})$*

O representante linear permite uma interpretação geométrica simples das classes de homotopia dos endomorfismos do toro, pois podemos entender as entradas da matriz associada como a forma como as curvas Ω_i se enrolam sob a ação das aplicações. A imagem 2 ilustra o representante linear associado à matriz $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Figura 2 – Exemplo de representante linear



Fonte: Imagem feita pelo autor

Finalmente, enunciaremos um resultado relativo aos homeomorfismos do toro:

Teorema 1: *Seja $\varphi \in C^0(T^2)$. Então $\varphi \simeq h \in \text{Homeo}(T^2)$ se, e somente se, $D(\varphi)$ é invertível.*

Demonstração:

1. Utilizado as propriedades de homotopia e do grau do toro, temos:

$$\begin{aligned} \varphi \simeq h \in \text{Homeo}(T^2) &\Rightarrow \varphi \circ h^{-1} \simeq \text{Id}_{T^2} \\ &\Rightarrow D(\varphi \circ h^{-1}) = \text{Id}_2 \\ &\Rightarrow D(\varphi)D(h^{-1}) = \text{Id}_2. \end{aligned}$$

Portanto, $D(\varphi)$ é invertível e sua inversa é $D(h^{-1})$.

2. Seja $D(\varphi)$ invertível e h a sua transformação linear do toro associada. Mostraremos que $h \in \text{Homeo}(T^2)$. Como T^2 é compacto e Hausdorff e h contínua, precisamos apenas mostrar bijetividade. Dado $(x_1, x_2) \in T^2$, o sistema:

$$\begin{cases} z_1^{D(\varphi)_{11}} z_2^{D(\varphi)_{12}} = x_1 \\ z_1^{D(\varphi)_{21}} z_2^{D(\varphi)_{22}} = x_2 \end{cases}$$

tem uma solução porque $\det(D(\varphi)) \neq 0$. Portanto, existe um ponto $(z_1, z_2) \in T^2$ tal que $h(z_1, z_2) = (x_1, x_2)$, provando a sobrejetividade. Agora, suponha que $h(x_1, x_2) = h(y_1, y_2)$. Então temos:

$$\begin{cases} x_1^{D(\varphi)_{11}} x_2^{D(\varphi)_{12}} = y_1^{D(\varphi)_{11}} y_2^{D(\varphi)_{12}} \\ x_1^{D(\varphi)_{21}} x_2^{D(\varphi)_{22}} = y_1^{D(\varphi)_{21}} y_2^{D(\varphi)_{22}} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $(x_i/y_i)^{\det(D(\varphi))} = 1$. Pela invertibilidade da matriz, $\det(D(\varphi)) = \pm 1$, portanto $x_i = y_i$. Logo, h é injetiva.

2.2 GRUPO MODULAR DO TORO

Utilizando a relação das classes de homotopia do toro com as matrizes de inteiros, somos capazes de determinar propriedades do toro a partir da álgebra das matrizes de inteiros. A seguir, definimos um importante invariante algébrico de uma superfície e estudaremos ele com base nas propriedades das matrizes de inteiros no caso do toro.

Definição 4: Dada uma superfície S , o Mapping Class Group de S , ou Grupo Modular de S , é definido como o quociente $MCG(S) = \text{Homeo}^+(S)/\text{Homeo}_0$, onde $\text{Homeo}^+(S)$ é o grupo dos homeomorfismos que conservam a orientação e Homeo_0 é o grupo dos homeomorfismos isotópicos à identidade.

Observação 1. No caso do toro, o grupo de homeomorfismos isotópicos à identidade coincide com o grupo dos homeomorfismos homotópicos à identidade (vide proposição 1.10, [2]).

Podemos identificar o grupo $\text{Homeo}^+(T^2)$ com o grupo dos homeomorfismos do toro com determinante 1. Com essa identificação, podemos concluir que

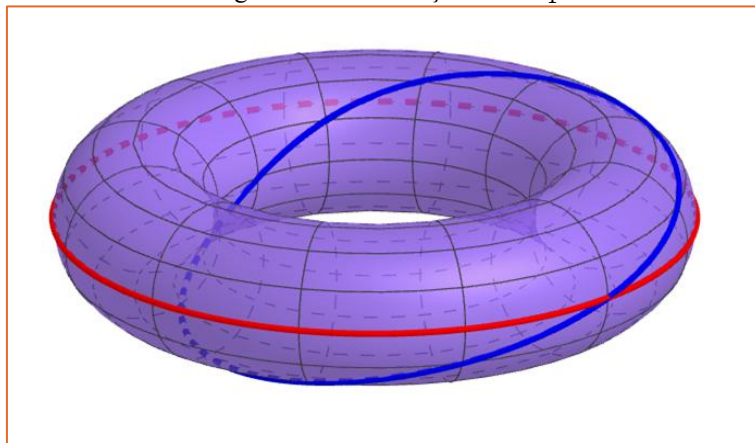
Proposição 4. O grupo modular do toro é isomorfo a $SL(2, \mathbb{Z})$.

Além disso, podemos achar os geradores desse grupo e entender geometricamente como são suas transformações lineares.

Definição 5: Os twists de Dehn são as transformações lineares do toro que são mapeadas por D para as seguintes matrizes (ou seus inversos): $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

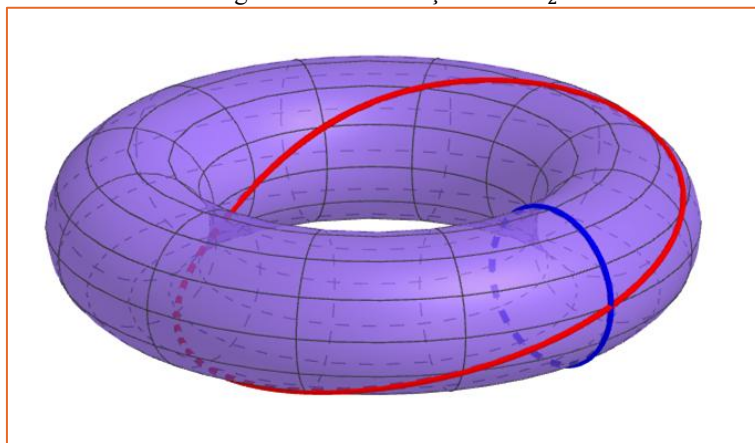
Podemos visualizar geometricamente os twists de Dehn, observando o como eles agem nas curvas Ω_i , nas figuras 3 e 4, de onde podemos compreender que cada um corresponde a torcer o toro no sentido de alguma das curvas.

Figura 3 – Visualização twist E_1



Fonte: Imagem feita pelo autor

Figura 4 – Visualização twist E_2



Fonte: Imagem feita pelo autor

Para demonstrar o próximo lema e proposição será importante o seguinte fato: observemos que dada uma matriz inteira A , multiplicar à esquerda por E_1 ou E_1^{-1} é equivalente a adicionar ou subtrair, respectivamente, a primeira linha de A à segunda linha. Da mesma forma, usando E_2 e E_2^{-1} , obtemos uma adição ou subtração da linha inferior à linha superior. Então podemos pensar numa propriedade operacional de linhas utilizando as matrizes de Dehn.

Lema 1: *Seja $E \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$. Valem as propriedades:*

1. $(E_1^{-2} \cdot E_2 \cdot E_1^{-1} \cdot E_2^{-1})^2 = -\text{Id}_2$
2. Se $e_{11} = 0$, então temos um dos casos:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & e_{22} \end{pmatrix} = E_1^{-e_{22}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_1^{-e_{22}} \cdot (E_1^{-2} \cdot E_2 \cdot E_1^{-1} \cdot E_2^{-1})^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & e_{22} \end{pmatrix} = E_1^{e_{22}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = E_1^{e_{22}} \cdot (E_1^{-2} \cdot E_2 \cdot E_1^{-1} \cdot E_2^{-1})$$

3. Se $e_{12} = 0$, então temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & e_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2^{e_{12}}, \text{ ou}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & e_{12} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = E_2^{-e_{12}} \cdot (-\text{Id}_2) = E_2^{-e_{12}} \cdot (E_1^{-2} \cdot E_2 \cdot E_1^{-1} \cdot E_2^{-1})^2$$

Teorema 2: $MCG(T^2)$ é gerado pelos Twists de Dehn.

Demonstração: Devido a equivalência estabelecida com o grau do toro, podemos traduzir esse problema para um problema de matrizes de inteiros. Seja $E \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$. Se qualquer uma das entradas na primeira coluna for zero, então as propriedades 2 e 3 do Lema 1 nos fornecem uma solução. Portanto, podemos assumir que todas as entradas na primeira coluna são diferentes de 0. Pela divisão euclidiana, existem $q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$, com $0 \leq r_1 < e_{21}$, tal que $e_{21} - q_1 e_{11} = r_1$. E podemos usar isso para escrever:

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & \star \\ e_{21} & \star \end{pmatrix} = E_2^{q_1} \cdot \begin{pmatrix} r_1 & \star \\ e_{21} & \star \end{pmatrix}$$

Como $\det(E) = 1$, segue que $\text{mdc}(e_{11}, e_{21}) = 1$ e, repetindo o processo, trocando as linhas a cada passo através do algoritmo euclidiano, obteremos após um número finito de iterações do processo:

$$E = E_2^{q_1} E_1^{q_2} \dots E_1^{q_n} \cdot \begin{pmatrix} 1 & e'_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2^{q_1} E_1^{q_2} \dots E_1^{q_n} \cdot E_2^{e'_{12}}, \text{ ou}$$

$$E = E_2^{q_1} E_1^{q_2} \dots E_2^{q_n} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & e'_{22} \end{pmatrix} = E_2^{q_1} E_1^{q_2} \dots E_2^{q_n} \cdot E_1^{-e'_{22}} \cdot (E_1^{-2} \cdot E_2 \cdot E_1^{-1} \cdot E_2^{-1})^{-1}$$

Ainda podemos fazer mais: estudando os autovalores das matrizes, é possível classificar os elementos de $MCG(T^2)$.

Teorema 3 (Classificação do Grupo Modular do Toro). *Seja $\varphi \in MCG(T^2)$. Então, vale alguma das alternativas:*

1. φ é periódica, i.e., alguma potência de φ é homotópica à identidade.
2. φ é redutível, i.e., existe uma curva simples e fechada no toro que é levada sobre si mesma por φ .
3. O representante linear de φ é Anosov.

Demonstração: Como foi dito, estudaremos o que acontece com os autovalores e autovetores da matriz. O polinômio característico é $\lambda^2 - \text{tr}(\varphi) + 1$. Se não houver raízes reais, teremos $|\text{tr}(\varphi)| < 2$. Nesses casos, podemos verificar que os autovalores são raízes na unidade, o que implica a periodicidade de φ . Se tivermos apenas um autovalor, podemos verificar que a matriz será da forma $\begin{pmatrix} \pm 1 & n \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$, ou a transposta. Assim, podemos perceber que, a menos da orientação, uma das curvas básicas do toro será levada nela mesma, o que corresponde ao caso redutível.

O caso restante é onde teremos dois autovalores reais satisfazendo $\lambda^{-1} < 1 < \lambda$. Considerando que a matriz $D(\varphi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, podemos verificar que os autovetores são $(-2b/(a-d+\sqrt{\text{Tr}(\varphi)^2-4}), 1)^T$ e $(2b/(d-a+\sqrt{\text{Tr}(\varphi)^2-4}), 1)^T$. Como $\sqrt{\text{Tr}(\varphi)^2-4} \notin \mathbb{Z}$, concluímos que esses vetores têm inclinação irracional. No representante linear de φ no toro, os subespaços gerados por cada um desses vetores correspondem a curvas perpendiculares, em uma escolha de estrutura euclidiana no toro, que são densas. Sejam $F^\pm$ as folheações do toro formadas por essas curvas e suas paralelas; a aplicação ϕ leva as folhas de $F^\pm$ sobre si mesmas, esticando folhas de F^+ por λ e comprimindo folhas de F^- por λ^{-1} .

3 CONCLUSÃO

Neste trabalho, conseguimos estabelecer uma definição para o grau do toro T^2 , no sentido de estender o grau de aplicação no S^1 , utilizando ferramentas de topologia e homotopia. A partir dessa definição, conseguimos relacionar a estrutura do grupo modular $\text{MCG}(T^2)$ com o grupo $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, criando uma conexão entre a topologia do toro e as matrizes de inteiros. Além disso, fornecemos uma intuição geométrica sobre as transformações do toro, entendendo, por exemplo, como os twists de Dehn agem sobre as curvas base no toro. A relação estabelecida nos permitiu classificar os elementos de $\text{MCG}(T^2)$ em redutíveis, periódicos e Anosov.

REFERÊNCIAS

- LEE, J. *Introduction to topological manifolds*. New York: Springer Science & Business Media, 2010.
- MARGALIT, D.; FARB, B. *A primer on mapping class groups*. Princeton: Princeton University Press, 2011.
- CALEGARI, D. *Foliations and the geometry of 3-manifolds*. Oxford: Oxford University Press, 2007.

O TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA DE LEBESGUE

 Crossref  10.56238/livrosindi202535-038
Sandro Willian Viana Brito

E-mail: caprinlife@gmail.com

Dalmi Gama dos Santos

E-mail: dalmi@ufpa.br

RESUMO

A teoria da integração evoluiu com o tempo, e uma das suas principais limitações surgiu com a integral de Riemann, especialmente ao lidar com funções mais complexas e com a convergência de sequências de funções. A necessidade de uma teoria mais robusta levou ao desenvolvimento da integral de Lebesgue, que oferece uma abordagem mais geral e flexível. Uma das contribuições mais importantes dessa teoria é o **Teorema da Convergência Dominada**, que resolve problemas de convergência de integrais em situações em que a integral de Riemann não é suficiente. Esse teorema garante que, sob certas condições, a integral do limite de uma sequência de funções integráveis é o limite das integrais dessas funções. Isso se torna essencial em várias áreas da matemática, como análise funcional, teoria das probabilidades e equações diferenciais, onde as condições de convergência são frequentemente mais complexas.

Palavras-chave: Análise matemática, Teoria da Medida e Integração, Integral de Lebesgue.

1 INTRODUÇÃO

A teoria da integração tem suas origens no antigo "método da exaustão", desenvolvido por Eudoxos e posteriormente aperfeiçoado por Arquimedes, com o objetivo de calcular áreas e volumes de figuras geométricas. Esse método, essencialmente geométrico, foi uma das primeiras tentativas sistemáticas de lidar com a ideia de soma infinita de partes. Ao longo dos séculos, o trabalho de matemáticos como Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz transformou esse conceito em uma ferramenta robusta para o cálculo das integrais, expandindo suas aplicações e estabelecendo as bases do cálculo moderno. No entanto, com o avanço da matemática, a teoria da integração foi se afastando de suas raízes geométricas e mecânicas, passando a se concentrar em problemas mais abstratos da análise matemática. A teoria clássica da integração, especialmente no contexto da integral de Riemann, mostrou-se limitada diante de problemas mais complexos, como a convergência de séries ortogonais e o tratamento de equações diferenciais e problemas probabilísticos.

Foi então que, no início do século XX, Henri Lebesgue desenvolveu uma nova abordagem, ampliando a definição de integral e proporcionando uma teoria mais poderosa e flexível. A integral de Lebesgue, ao lidar com uma classe maior de funções e ao permitir permutações mais gerais entre limites e integrais, superou as limitações da integral de Riemann.

Seus teoremas de convergência, que aplicam-se sob condições mais brandas, têm se mostrado fundamentais em diversas áreas da matemática moderna. Esse desenvolvimento tornou-se essencial para o tratamento de questões mais gerais e complexas, consolidando a teoria de Lebesgue como a ferramenta preferida para muitos problemas contemporâneos.

2 PRELIMINARES

Para apresentar o Teorema da Convergência Dominada, é necessário primeiro estabelecer os conceitos fundamentais da Teoria da Medida e da Integração de Lebesgue. Esta seção define o espaço de medida, as funções mensuráveis e a construção da integral de Lebesgue.

Definição 2.1 - σ -álgebra: Uma família Ω de subconjuntos de um conjunto X é denominada uma σ -álgebra se:

- I.** $\emptyset$ e X pertencem a Ω .
- II.** Se A pertence a Ω , então o complemento $C(A) = X \setminus A$ pertence a Ω .
- III.** Se (A_n) é uma sequência de conjuntos em Ω , então a união $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pertence a Ω .

Um par ordenado (X, Ω) consistindo de um conjunto X e de uma σ -álgebra Ω de subconjuntos de X é chamado espaço mensurável.

Exemplo 2.2:

- a)** Seja X um conjunto não vazio. A família $\Omega = \{\emptyset, X\}$ é chamada de σ -álgebra trivial sobre X .
- b)** Seja $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. A família $\Omega = \{\emptyset, \{1, 3, 5, \dots\}, \{2, 4, 6, \dots\}, X\}$ é uma σ -álgebra sobre X , gerada pela partição dos números pares e ímpares.
- c)** Seja X o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. A álgebra de Borel é a σ -álgebra ω gerada por todos os intervalos abertos (a, b) em $\mathbb{R}$. Observe que a σ -álgebra ω é também a σ -álgebra gerada por todos os intervalos fechados $[a, b]$ em $\mathbb{R}$. Todo conjunto de ω é dito um conjunto de Borel.

Definição 2.3 - Função mensurável: Uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita mensurável se para todo número real α o conjunto

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\}$$

pertence a Ω .

Definição 2.4: Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, definimos as funções não negativas f^+ e f^- sobre X por:

$$f^+(x) = \sup \{f(x), 0\} \quad f^-(x) = \sup \{-f(x), 0\}$$

chamadas respectivamente de parte positiva e parte negativa da função f .

Definição 2.5 – Medida: Uma medida é uma função μ a valores reais estendidos definida sobre uma σ -álgebra Ω de subconjuntos de X tal que:

- I.** $\mu(\emptyset) = 0$,
- II.** $\mu(E) \geq 0$, para todo $E \in \Omega$
- III.** μ é enumeravelmente aditiva no sentido de que se (E_n) é uma sequência de subconjuntos disjuntos de X , então:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Exemplo 2.6:

- a)** Seja (X, Ω) como em (i) do exemplo 2.2 e seja p um elemento fixado de X . Seja μ definida para $E \in \Omega$ por:

$$\mu(E) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in E \\ 0, & \text{se } p \notin E \end{cases}$$

é chamada unidade de medida concentrada em p .

- b)** Seja $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ e seja Ω a σ -álgebra de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$. Se $E \in \Omega$, defina $\mu(E)$ como sendo igual ao número de elementos de E , se E é finito, e $+\infty$ se E é um conjunto infinito. Então μ é uma medida e é denominada a medida de contagem sobre $\mathbb{N}$.

Definição 2.7 - Função Simples: Uma função a valores reais é simples se assume apenas um número finito de valores. Uma função simples mensurável φ possui a seguinte representação padrão:

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$ são distintos e χ_{E_j} é a função característica de cada termo de uma sequência de conjuntos E_j disjuntos em X , tais que $\bigcup_{j=1}^n E_j = X$.

Definição 2.8: Se φ é uma função simples em $M^+(X, \Omega)$ com a representação padrão, definimos a integral de φ com relação a μ como sendo o número real estendido:

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j)$$

Definição 2.9 – Integral de Lebesgue: Se $f: X \rightarrow [0, \infty]$ é uma função mensurável, a sua integral é definida como o supremo das funções simples que a minoram:

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int \varphi d\mu ; \varphi \text{ é simples e } 0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \right\}$$

Definição 2.10: A coleção $L(X, \Omega, \mu)$ de funções integráveis consiste de todas as funções Ω -mensuráveis a valores reais f , definidas sobre X , tais que ambas as partes f^+ , f^- , de f , possuem integral finita com relação a μ . Neste caso, definimos a integral de f com relação a μ como sendo:

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

Se E pertence a Ω , então definimos:

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

3 TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA

Lema de Fatou: Se (f_n) pertence a $M^+(X, \Omega)$, então:

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

Teorema 3.1: Se f é mensurável, g é integrável e $|f| \leq |g|$, então f é integrável, e

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$$

Teorema 3.2: A multiplicação por uma constante αf e a soma $f + g$ de funções que pertencem a L , pertencem a L e:

$$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu, \quad \int f + g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue: Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis.

- I. f_n converge em quase toda parte para uma função a valores reais f .
- II. Se existe uma função integrável g que satisfaz:

$$|f_n| \leq g, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

então f é integrável e:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

Prova:

Redefinindo as funções (f_n) e f , sobre um conjunto de medida nula, podemos assumir que a convergência ocorre em todo X . Pela hipótese (II) segue do teorema 3.1 que f é integrável. Uma vez que

$$g + f_n \geq 0$$

podemos aplicar o Lema de Fatou e o teorema 3.2 para obter:

$$\begin{aligned} \int g d\mu + \int f d\mu &= \int (g + f) d\mu \leq \liminf \int (g + f_n) d\mu \\ &= \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu \end{aligned}$$

assim, segue que:

$$\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

Agora, uma vez que $g - f_n \geq 0$, uma outra aplicação do Lema de Fatou e do teorema 3.2 nos dá que:

$$\int g \, d\mu - \int f \, d\mu = \int (g - f) \, d\mu \leq \liminf \int (g - f_n) \, d\mu$$

$$\int g \, d\mu - \liminf \int f_n \, d\mu$$

de onde obtemos que:

$$\limsup \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$$

Combinando as desigualdades, podemos concluir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

o que prova o resultado.

4 CONCLUSÃO

A evolução da teoria da integração, especialmente com o advento da integral de Lebesgue, representou um marco importante na análise matemática. Superando as limitações da integral de Riemann, ela ampliou o campo de aplicação da integração. O Teorema da Convergência Dominada, em particular, fornece uma ferramenta poderosa e flexível para justificar a troca de limites com integrais, uma operação fundamental em diversas áreas da matemática pura e aplicada.

REFERÊNCIAS

BARTLE, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. New York: John Wiley & Sons, 1995. W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, 1986.

RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. McGraw Hill, 1986

REALIZAÇÃO:



ACESSE NOSSO CATÁLOGO!



WWW.SEVENPUBLI.COM

CONECTANDO O **PESQUISADOR** E A **CIÊNCIA** EM UM SÓ CLIQUE.